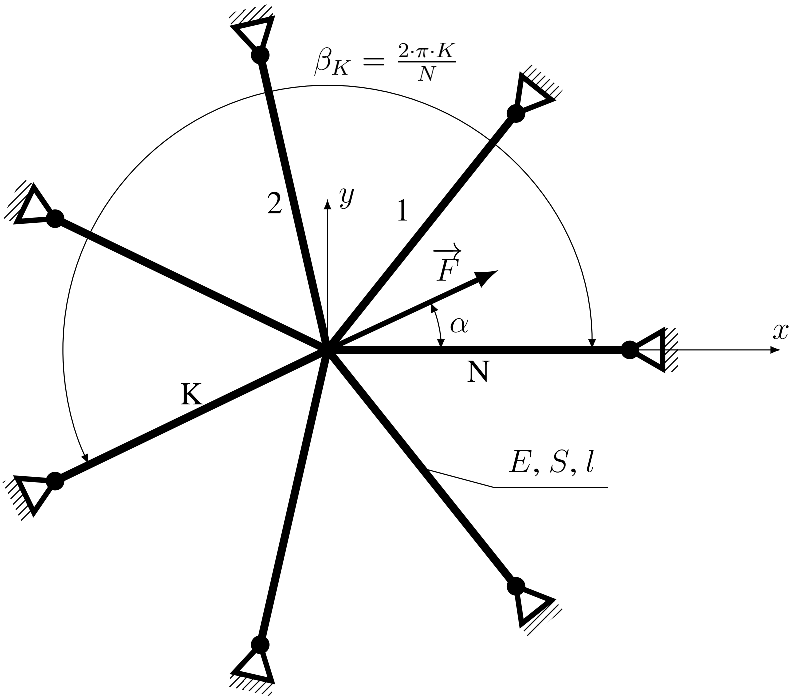
N-násobný závěs styčníku



Prutová soustava podle obrázku je zatížena silou F. Jednotlivé pruty jsou rozloženy pravidelně po obvodu.
Dáno: všechny rozměry, materiály a zatížení
Určete výchylku styčníku.

Rovnice rovnováhy styčníku

$$F \cdot \cos\alpha + \sum_{K=1}^{N} N_K \cdot \cos\beta_K = 0$$

$$F \cdot \sin\alpha + \sum_{K=1}^{N} N_K \cdot \sin\beta_K = 0$$

Fyzikální rovnice pro jednotlivé pruty

$$\Delta l_K = \frac{N_K \cdot l}{E \cdot S}$$

Deformační rovnice

$$\Delta l_K = -u \cdot \cos\beta_K - v \cdot \sin\beta_K$$

Uzavřená soustava $(2 \cdot N + 2)$ rovnic o stejném počtu neznámých $[N_K, \Delta l_K, u, v]$.

Řešení soustavy rovnic

Dosazením FR do DR dostaneme N vztahů v podobě:

$$N_K = \frac{E \cdot S}{l} \cdot (-u \cdot \cos\beta_K - v \cdot \sin\beta_K)$$

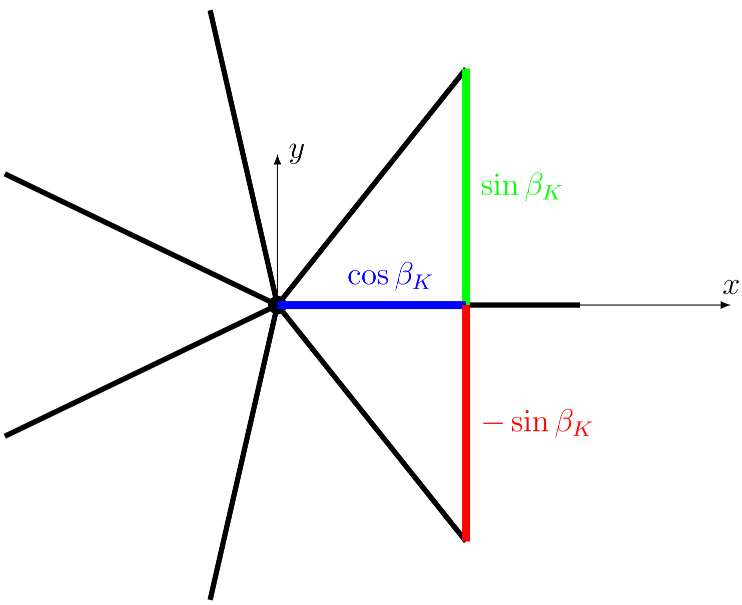
které dosadíme do rovnic rovnováhy:

$$F \cdot \cos\alpha + \sum_{K=1}^{N} \left(\frac{E \cdot S}{l} \cdot (-u \cdot \cos\beta_K - v \cdot \sin\beta_K) \right) \cdot \cos\beta_K = 0$$
$$F \cdot \sin\alpha + \sum_{K=1}^{N} \left(\frac{E \cdot S}{l} \cdot (-u \cdot \cos\beta_K - v \cdot \sin\beta_K) \right) \cdot \sin\beta_K = 0$$

Po jednoduché úpravě dostaneme:

$$\frac{F \cdot l}{E \cdot S} \cdot \cos\alpha = u \cdot \sum_{K=1}^{N} \cos^2\beta_K + v \cdot \sum_{K=1}^{N} \sin\beta_K \cdot \cos\beta_K$$
$$\frac{F \cdot l}{E \cdot S} \cdot \sin\alpha = u \cdot \sum_{K=1}^{N} \sin\beta_K \cdot \cos\beta_K + v \cdot \sum_{K=1}^{N} \sin^2\beta_K$$

Bez újmy na obecnosti můžeme volit osu N-tého prutu identicky s osou x vztažného systému. Bez ohledu na počet prutů pak bude soustava symetrická kolem osy x; ke každému prutu v *horní* části (tj. $y > 0$ nebo taky $\beta_K \in (0, \pi)$) existuje symetrický prut v *dolní* části soustavy:



Z předchozího obrázku je zřejmé, že platí:

$$\sum_{K=1}^{N} \sin\beta_K \cdot \cos\beta_K = 0$$

Výsledná soustava má tedy tvar:

$$\frac{F \cdot l}{E \cdot S} \cdot \cos\alpha = u \cdot \sum_{K=1}^{N} \cos^2\beta_K$$
$$\frac{F \cdot l}{E \cdot S} \cdot \sin\alpha = v \cdot \sum_{K=1}^{N} \sin^2\beta_K$$

První rovnici upravíme pomocí součtového vzorce na tvar:

$$\frac{F \cdot l}{E \cdot S} \cdot \cos\alpha = u \cdot \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \cos\left(2 \cdot \beta_K\right)\right) = u \cdot \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{K=1}^{N} \cos\left(2 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot K}{N}\right)\right)$$

Důkaz faktu, že $\sum\limits_{K=1}^{N} \cos\left(2 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot K}{N}\right) = 0$, je možno provést pomocí geometrické interpretace analogicky předchozímu důkazu: dvojnásobný úhel vede na dělení jednotkové kružnice na sudý počet úseků, kdy ke každému úhlu β_K existuje i úhel $\beta_K + \pi : \cos\beta_K = -\cos\left(\beta_K + \pi\right)$, případně opakovaným použitím součtových vzorců. Rovnice rovnováhy tedy má podobu:

$$\frac{F \cdot l}{E \cdot S} \cdot \cos\alpha = u \cdot \frac{N}{2}$$

Úpravou druhé rovnice rovnováhy pak dostaneme:

$$\frac{F \cdot l}{E \cdot S} \cdot \sin\alpha = v \cdot \sum_{K=1}^{N} \sin^2\beta_K = v \cdot \sum_{K=1}^{N} 1 - \cos^2\beta_K = v \cdot \left(N - \frac{N}{2}\right) = v \cdot \frac{N}{2}$$

Řešením těchto rovnic pak dostaneme:

$$u = \frac{2}{N} \cdot \frac{F \cdot l}{E \cdot S} \cdot \cos\alpha$$
$$v = \frac{2}{N} \cdot \frac{F \cdot l}{E \cdot S} \cdot \sin\alpha$$

Absolutní výchylka styčníku pak je:

$$\Delta = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{2}{N} \cdot \frac{F \cdot l}{E \cdot S}$$

Je zřejmé, že její hodnota nezávisí na úhlu α. $\square$