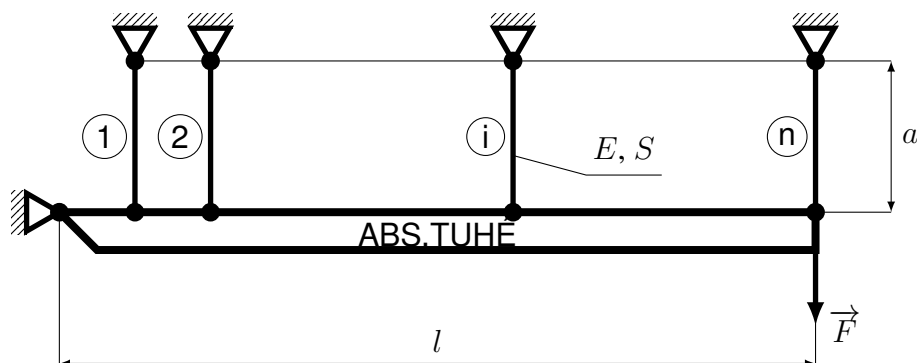


## Trám na $n$ -násobném závěsu

Dokonale tuhý trám spojený s rámem kloubem je zavěšen na  $n$ -prutech rozmístěných v pravidelných intervalech po celé délce, a je zatížen podle obrázku:



Určete síly v pravidelně rozmístěných  $n$ -prutech  $N_i$ .

### Popis úlohy

Rovnice rovnováhy:

$$\begin{aligned} R_x &= 0 \\ R_y + \sum_{i=1}^n N_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n N_i \cdot \frac{i \cdot l}{n} - F \cdot l &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Fyzikální rovnice:

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot a}{E \cdot S}$$

Deformační rovnice:

$$\Delta l_i = i \cdot \frac{l}{n} \cdot \varphi$$

Soustava  $2n + 3$  rovnic o neznámých  $[N_i, R_x, R_y, \Delta l_i, \varphi]$ .

### Řešení

Porovnáním fyzikálních a deformačních rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{N_i \cdot a}{E \cdot S} &= i \cdot \frac{l}{n} \cdot \varphi \\ N_i &= E \cdot S \cdot \frac{l}{a} \cdot \frac{i}{n} \cdot \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

Dosazením (2) do (1) a po úpravě dostaneme:

$$E \cdot S \cdot \frac{l}{a} \cdot \varphi \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 = F$$

Řešení pro  $\varphi$  je:

$$\varphi = \frac{F \cdot a}{E \cdot S \cdot l} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{n} \right)^2 \right)^{-1} = \frac{F \cdot a}{E \cdot S \cdot l} \cdot n^2 \cdot \left( \sum_{i=1}^n i^2 \right)^{-1}$$

Zpětným dosazením do (2) dostaneme:

$$N_i = F \cdot \frac{i \cdot n}{\sum_{i=1}^n i^2}$$

S použitím vztahu pro součet řady:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3} + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = n \cdot \frac{2 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1}{6}$$

dostaneme pro  $N_i$ :

$$N_i = F \cdot \frac{6 \cdot i}{2 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1} \quad \text{pro } i \in \langle 1, n \rangle$$