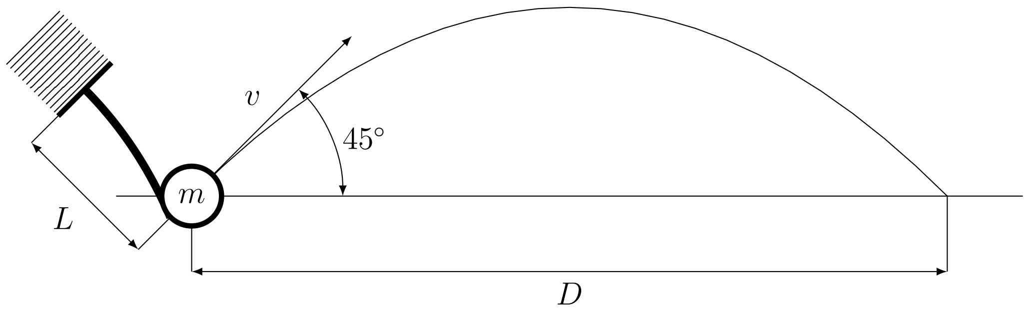
Příklad na použití nosníku

Balista

Navrhněte rameno balisty tak, aby dokázala vrhnout projektil o hmotnosti m do vzdálenosti D a nebylo přitom překročeno maximální napětí σ_D v rameni o dané délce L.



Řešení šikmého vrhu

Obecné řešení vrhu pod úhlem α vůčí vodorovné základně se zanedbáním odporu prostředí:

$$D = 2 \cdot \frac{v^2}{g} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

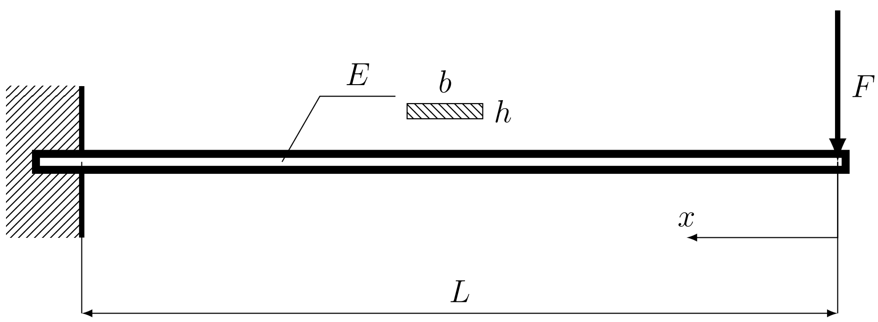
Maxima D bude pro danou počáteční rychlost v dosaženo při vrhu pod úhlem $45°$:

$$D = \frac{v^2}{g}$$

a tedy minimální rychlost šikmého vrhu potřebná pro dosažení vodorovné vzdálenosti D je:

$$v = \sqrt{D \cdot g} \tag{1}$$

Řešení vetknutého nosníku zatíženého silou na konci



Průběh ohybového momentu:

$$M_o(x) = -F \cdot x$$

Dosazením do diferenciální rovnice průhybové čáry dostaneme:

$$w'' = -\frac{M_o(x)}{E \cdot J_y} = \frac{F \cdot x}{E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} \tag{2}$$

Maxima ohybového momentu bude dosaženo pro $x = L$, tj. ve vetknutí; porovnáním s maximálním momentem způsobujícím napětí σ_D dostaneme

$$M_{o,max} = F \cdot L = W_o \cdot \sigma_D \;\Rightarrow\; F = \frac{\frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \sigma_D}{L}$$

Dosazením do (2) dostáváme:

$$w'' = \frac{2 \cdot \sigma_D \cdot x}{E \cdot h \cdot L}$$

Postupnou integrací získáme:

$$w' = \varphi = \frac{2 \cdot \sigma_D}{E \cdot h \cdot L} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) \tag{3}$$

$$w = \frac{2 \cdot \sigma_D}{E \cdot h \cdot L} \cdot \left(\frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2 \right) \tag{4}$$

Okrajové podmínky jsou dány vetknutím:

$$\varphi\,(L) = w'\,(L) = 0 \quad \text{a} \quad w\,(L) = 0 \tag{5}$$

Použitím OP (5) ve vztazích (3) a (4) dostaneme soustavu 2 rovnic o neznámých C_1 a C_2, která má řešení:

$$C_1 = -\frac{L^2}{2} \quad \text{a} \quad C_2 = \frac{L^3}{3}$$

Výsledná průhybová čára má tedy podobu:

$$w = \frac{2 \cdot \sigma_D}{E \cdot h \cdot L} \cdot \left(\frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{2} \cdot x + \frac{L^3}{3} \right) \tag{6}$$

Použitím vztahů pro definici φ, diferenciální rovnice průhybové čáry a Schwedlerovy věty pak dostaneme:

$$w' = \varphi = \frac{2 \cdot \sigma_D}{E \cdot h \cdot L} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{2} \right)$$

$$M\,(x) = -E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot w'' = -\frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_D}{6 \cdot L} \cdot x$$

$$T\,(x) = -\frac{dM\,(x)}{dx} = \frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_D}{6 \cdot L} = F \tag{7}$$

Hodnota průhybu na konci, tj. v působišti síly o velikosti $F = \frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_D}{6 \cdot L}$, je:

$$w\,(0) = \frac{2 \cdot \sigma_D \cdot L^2}{3 \cdot E \cdot h} \tag{8}$$

Deformační energie

Zaveďme si prozatím deformační energii jako práci vykonanou silou při ohybu ramene:

$$U = \frac{1}{2} \cdot F \cdot w\,(0) \tag{9}$$

Dosazením (7) a (8) do (9) dostaneme:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_D}{6 \cdot L} \cdot \frac{2 \cdot \sigma_D \cdot L^2}{3 \cdot E \cdot h} = \frac{L \cdot b \cdot h \cdot \sigma_D^2}{18 \cdot E}$$

Tuto energii porovnáme s kinetickou energií projektilu v okamžiku vrhu:

$$V = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \overset{\text{podle (1)}}{=} \frac{m \cdot D \cdot g}{2}$$

Porovnáním hodnot energií U a V dostaneme požadované hodnoty b a h:

$$b \cdot h = 9 \cdot m \cdot g \cdot \frac{D}{L} \cdot \frac{E}{\sigma_D^2} \tag{10}$$

případně i pro volitelné L:

$$b \cdot h \cdot L = 9 \cdot m \cdot g \cdot D \cdot \frac{E}{\sigma_D^2} \tag{11}$$

Dimenzování pružiny

Z výsledného vztahu je zřejmé, že rozměry průřezu nejsou nezávislé, nejsou nicméně jednoznačně dané. Při dimenzování tak musíme použít další podmínku. Je-li např. omezená maximální napínací síla F (použijeme (10) v (7)):

$$F = 9 \cdot m \cdot g \cdot \frac{D}{L} \cdot \frac{E}{\sigma_D^2} \cdot \frac{h \cdot \sigma_D}{6 \cdot L} = \frac{3}{2} \cdot m \cdot g \cdot \frac{D \cdot h}{L^2} \cdot \frac{E}{\sigma_D}$$

a tedy:

$$h = \frac{2}{3} \cdot \frac{F}{m \cdot g} \cdot \frac{\sigma_D}{E} \cdot \frac{L^2}{D}$$
$$b = \frac{27}{2} \cdot \frac{(D \cdot E \cdot m \cdot g)^2}{(L \cdot \sigma_D)^3} \cdot \frac{1}{F}$$

Zajímavost

Při rozboru vztahu (11) zjistíme, že pro hodnoty požadované výkonem a dané použitým materiálem je výsledný objem ramene $b \cdot h \cdot L$ daný.