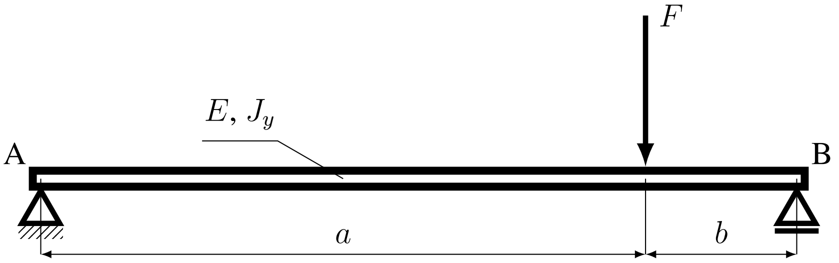
Nosník na dvou podporách

Je zadán nosník na dvou podpěrách, zatížený osamělou silou podle obrázku. Určete průběh průhybové čáry a velikost a polohu maxima průhybu.



Řešení rovnic rovnováhy

$$R_A + R_B = F$$
$$R_B \cdot (a+b) = F \cdot a$$

Jejich řešením dostaneme:

$$R_A = F \cdot \frac{b}{a+b}\,, \quad R_B = F \cdot \frac{a}{a+b} \tag{1}$$

Řešení průhybu pomocí teorie průhybové čáry

Vyjádření ohybového momentu v jednotlivých úsecích:

$$M_{o,1} = R_A \cdot x = F \cdot \frac{b}{a+b} \cdot x \tag{2}$$
$$M_{o,2} = R_A \cdot x - F \cdot (x-a) = F \cdot \frac{a}{a+b} \cdot (a+b-x) \tag{3}$$

Vztahy pro ohybové momenty (2) a (3) použijeme v diferenciálních rovnicích průhybové čáry; jsou dvě, pro každý úsek jedna:

$$w_1'' = -\frac{M_{o,1}}{E \cdot J_y} \tag{4}$$
$$w_2'' = -\frac{M_{o,2}}{E \cdot J_y} \tag{5}$$

Postupnou integrací (4) a (5) dostaneme:

$$\varphi_1 = w_1' = -\frac{F}{E \cdot J_y} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C_{11}\right) \tag{6}$$
$$\varphi_2 = w_2' = -\frac{F}{E \cdot J_y} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \left((a+b) \cdot x - \frac{x^2}{2} + C_{21}\right) \tag{7}$$

$$w_1 = -\frac{F}{E \cdot J_y} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \left(\frac{x^3}{6} + C_{11} \cdot x + C_{12}\right) \tag{8}$$
$$w_2 = -\frac{F}{E \cdot J_y} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \left((a+b) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_{21} \cdot x + C_{22}\right) \tag{9}$$

Integrační konstanty C_{11} až C_{22} dostaneme z okrajových podmínek:

$$w_1\,(x = 0) = 0 \tag{10}$$

$$w_2\,(x = a + b) = 0 \tag{11}$$

$$w_1\,(x = a) = w_2\,(x = a) \tag{12}$$

$$w_1'\,(x = a) = w_2'\,(x = a) \tag{13}$$

Dosazení vztahů (6) až (9) do OP (10) až (13) vede na soustavu 4 rovnic. Její řešení není obtížné, je nicméně pracné. Na konec dostaneme:

$$C_{11} = -\frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b}{6}\,, \qquad C_{12} = 0$$

$$C_{21} = -\frac{3 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b^2}{6}\,, \qquad C_{22} = \frac{a^3 + a^2 \cdot b}{6}$$

Dosazením těchto hodnot do vztahů (6) až (9) bychom dostali rovnice průhybové čáry v jednotlivých úsecích. Pro hodnotu maxima průhybu bychom hledali x, pro které je hodnota φ_1, resp. φ_2 nulová:

$$\frac{x^2}{2} + C_{11} = 0 \quad \text{pro } x \in \langle 0, a\rangle$$

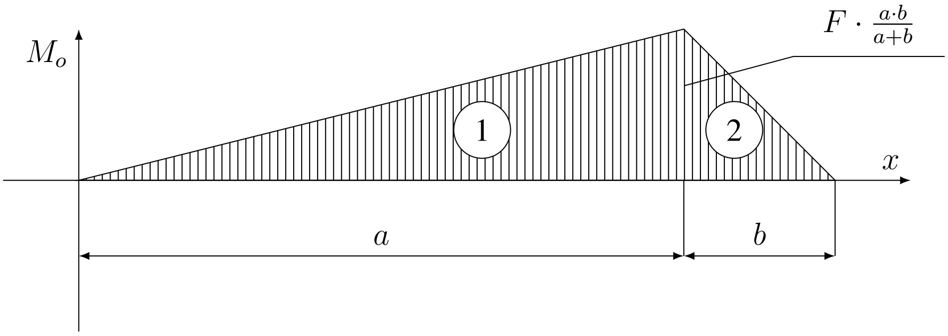
$$(a + b) \cdot x - \frac{x^2}{2} + C_{21} = 0 \quad \text{pro } x \in \langle a, a + b\rangle$$

Řešení v intervalu $x \in \langle 0, a\rangle$ je jednoduché, ve druhém intervalu je poněkud složitější.

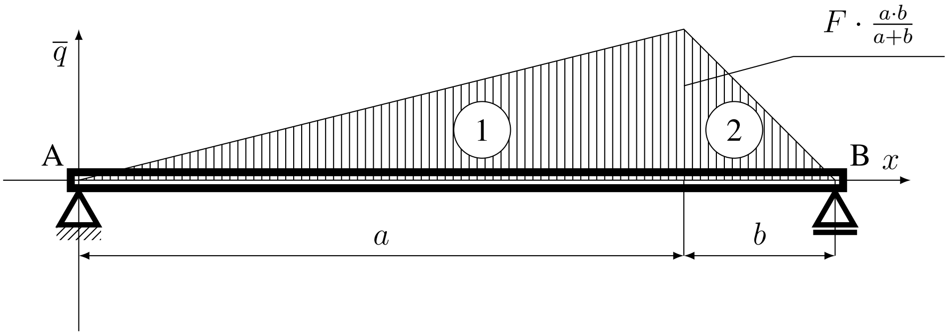
Řešení pomocí Mohrova náhradního nosníku

Průběh reálného ohybového momentu

Nakresleme si tzv. momentové plochy:



Mohrův náhradní nosník



Řešení problému spočívá ve stanovení VSÚ od náhradního zatížení $\overline{q}$.

Řešení rovnic rovnováhy

$$\overline{R_A} + \overline{R_B} - \frac{1}{2} \cdot F \cdot \frac{a \cdot b}{a+b} \cdot (a+b) = 0$$

$$\overline{R_B} \cdot (a+b) - \frac{1}{2} \cdot F \cdot \frac{a \cdot b}{a+b} \cdot \left(a \cdot \frac{2}{3} \cdot a + b \cdot \left(a + \frac{b}{3} \right) \right) = 0$$

resp.

$$\overline{R_A} \cdot (a+b) - \frac{1}{2} \cdot F \cdot \frac{a \cdot b}{a+b} \cdot \left(b \cdot \frac{2}{3} \cdot b + a \cdot \left(b + \frac{a}{3} \right) \right) = 0$$

Jejich řešení:

$$\overline{R_A} = \frac{F}{6} \cdot \frac{a \cdot b}{a+b} \cdot (a + 2 \cdot b) \ , \quad \overline{R_B} = \frac{F}{6} \cdot \frac{a \cdot b}{a+b} \cdot (2 \cdot a + b)$$

Náhradní ohybový moment

Metodou řezu nyní budeme hledat ohybový moment $\overline{M}$ od náhradního zatížení v libovolném místě. Pro interval $x \in \langle 0, a \rangle$ dostaneme:

$$\overline{M_{o,1}} = \overline{R_A} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot F \cdot \frac{a \cdot b}{a+b} \cdot \frac{x}{a} \cdot x \cdot \frac{x}{3} = \frac{F \cdot a \cdot b}{6 \cdot (a+b)} \cdot \left(x \cdot (a + 2 \cdot b) - \frac{x^3}{a} \right)$$

Protože podle Mohrovy analogie platí:

$$\overline{M} = -E \cdot J_y \cdot w$$

dostaneme pro průhyb v uvedeném intervalu:

$$w_1 = \frac{F}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{a \cdot b}{a+b} \cdot \left(\frac{x^3}{a} - x \cdot (a + 2 \cdot b) \right) \tag{14}$$

a pro natočení $\varphi_1 = \frac{dw_1}{dx}$:

$$\varphi_1 = \frac{F}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{a \cdot b}{a+b} \cdot \left(3 \cdot \frac{x^2}{a} - (a + 2 \cdot b) \right)$$

Pozn: Hodnotu φ_1 bychom mohli hledat i jako hodnotu posouvací síly $\overline{T}$ v místě x.

Maximum průhybu

Za předpokladu $a \geq b > 0$ jeho polohu dostaneme řešením rovnice:

$$w_1' = \varphi = 0$$

$$3 \cdot \frac{x_{max}^2}{a} - (a + 2 \cdot b) = 0$$

$$x_{max} = \sqrt{\frac{a}{3} \cdot (a + 2 \cdot b)}$$

Dosazením $x = x_{max}$ v (14) bychom získali hodnotu maxima průhybu.