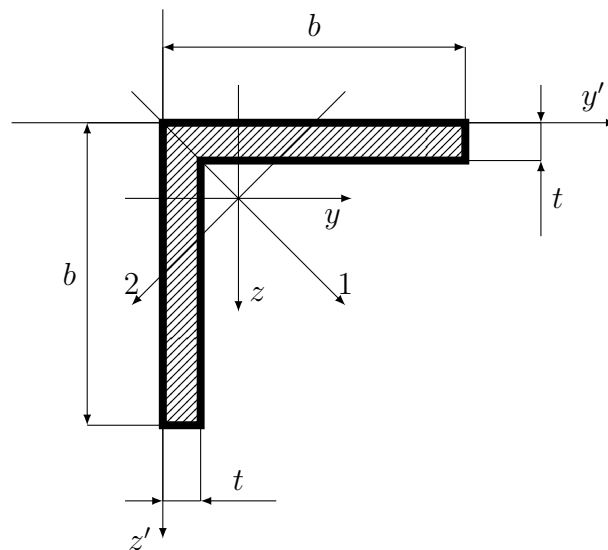


Obecný ohyb štíhlých nosníků

Vliv deviačního momentu na ohyb prutu

Příklad výpočtu deviačního momentu



Poloha těžiště:

$$z_t \cdot (b \cdot t + (b - t) \cdot t) = \frac{b}{2} \cdot b \cdot t + \frac{t}{2} \cdot (b - t) \cdot t$$
$$z_t = y_t = \frac{b^2 + b \cdot t - t^2}{4 \cdot b - 2 \cdot t}$$

Předpokládejme $t \ll b$:

$$y_t = z_t \doteq \frac{b}{4}$$

Centrální kvadratické momenty:

$$J_y = \frac{b^3 \cdot t}{12} + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{4}\right)^2 \cdot b \cdot t + \frac{(b - t) \cdot t^3}{12} + \left(\frac{b}{4} - \frac{t}{2}\right)^2 \cdot (b - t) \cdot t$$
$$J_y = J_z = \frac{5}{24} \cdot b^3 \cdot t - \frac{5}{16} \cdot b^2 \cdot t^2 + \frac{7}{12} \cdot b \cdot t^3 - \frac{t^4}{3}$$

Za výše uvedeného předpokladu můžeme psát:

$$J_y = J_z \doteq \frac{5}{24} \cdot b^3 \cdot t$$

Deviační moment k centrálním osám rovnoběžným s rameny profilu:

$$D_{yz} = -\frac{b}{4} \cdot \frac{b}{4} \cdot b \cdot t - \frac{b}{4} \cdot \frac{b}{4} \cdot (b - t) \cdot t$$

S použitím uvedeného předpokladu:

$$D_{yz} \doteq -\frac{1}{8} \cdot b^3 \cdot t$$

S použitím např. Cullmanovy kružnice bychom pak dostali:

$$J_1 = J_y + |D_{yz}| = \frac{1}{3} \cdot b^3 \cdot t, \quad J_2 = J_y - |D_{yz}| = \frac{1}{12} \cdot b^3 \cdot t$$

a hlavní osy by byly pootočené o 45° , viz obrázek.

Ohyb štíhlých prutů pro $D_{yz} \neq 0$

Předpokládejme, že štíhlý¹ prut je ohýbaný kolem jiných os než hlavních; vezměme za příklad ohyb předchozího L-profilu kolem centrálních os $[y, z]$. Za uvedených předpokladů bude platit:

$$M_{o,y} = \int_{(S)} \sigma(z) \cdot z \, dS = -E \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot \int_{(S)} z^2 \, dS = -E \cdot J_y \cdot w''$$

Výsledný moment napětí s průběhem $\sigma(z) = -E \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot z = \frac{M_{o,y}}{J_y} \cdot z$ bude:

$$M_{o,z} = \int_{(S)} \sigma(z) \cdot y \, dS = -E \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot \int_{(S)} y \cdot z \, dS = -E \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot D_{yz} = M_{o,y} \cdot \frac{D_{yz}}{J_y} \neq 0$$

Ohyb štíhlého nosníku je tedy možno zapsat následovně:

$$\begin{vmatrix} M_{o,y} \\ M_{o,z} \end{vmatrix} = E \cdot \begin{vmatrix} J_y & D_{yz} \\ -D_{yz} & J_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -w'' \\ -v'' \end{vmatrix} = E \cdot \|\mathbf{J}\| \cdot \begin{vmatrix} -w'' \\ -v'' \end{vmatrix}$$

Úpravou předchozího vztahu násobením zleva inverzní maticí $\frac{1}{E} \cdot \|\mathbf{J}\|^{-1}$ dostaneme:

$$\frac{1}{E} \cdot \begin{vmatrix} \frac{J_z}{J_y \cdot J_z + D_{yz}^2} & \frac{D_{yz}}{J_y \cdot J_z + D_{yz}^2} \\ -\frac{D_{yz}}{J_y \cdot J_z + D_{yz}^2} & \frac{J_y}{J_y \cdot J_z + D_{yz}^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_{o,y} \\ M_{o,z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -w'' \\ -v'' \end{vmatrix}$$

Pro $M_{o,z} = 0$ budou diferenciální rovnice průhybové čáry mít podobu:

$$w'' = -\frac{1}{E} \cdot \frac{J_z}{J_y \cdot J_z + D_{yz}^2} \cdot M_{o,y}$$
$$v'' = \frac{1}{E} \cdot \frac{D_{yz}}{J_y \cdot J_z + D_{yz}^2} \cdot M_{o,y}$$

Případ $D_{yz} = 0$: Je zřejmé, že pro $D_{yz} = 0$ dostaneme dobře známý vztah $w'' = -\frac{M_{o,y}}{E \cdot J_y}$. Pro stanovení v pak vyjdeme z faktu, že $v'' = 0$; řešení v je dáno okrajovými podmínkami, v každém případě však je křivost v rovině $[x, y]$ v takovém případě nulová (nosník se může natočit kolem osy z jako tuhé těleso, nedojde ale k jeho ohybu).

¹Předpoklad štíhlosti prutu se promítne prostřednictvím platnosti Bernoulliho a Kirchhoffovy hypotézy do podoby průběhu normálového napětí σ .

Vliv posouvací síly na deformaci nosníku

Předpokládejme štíhlý² nosník zatížený posouvací silou působící ve směru osy z :

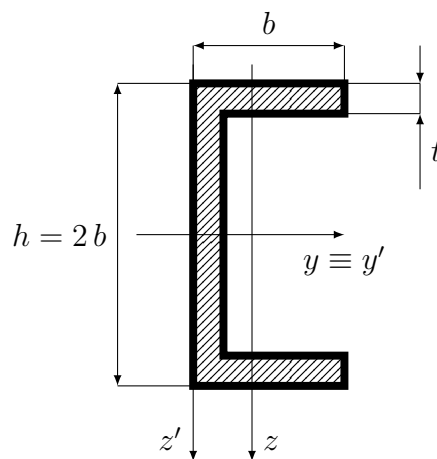
$$T = \frac{dM_{o,y}}{dx} \neq 0$$

Pro *tenkostěnné* profily platí Žuravského vztah³:

$$\tau = \frac{T}{J_y} \cdot \frac{S(\xi)}{t(\xi)} \quad (1)$$

kde $t(\xi)$ je *tloušťka stěny* nosníku (obecně závislá na průběžné souřadnici ξ) a $S(\xi)$ je statický moment *odříznuté části* profilu na souřadnici ξ .

Příklad výpočtu smykového napětí



Mějme U-profil o konstantní tloušťce $t \ll b$ a poměru délek stěn $h = 2 \cdot b$. Jednoduchým výpočtem analogickým k postupu pro L-profil zjistíme, že:

$$y_t = \frac{b}{4}, \quad z_t = 0$$

a

$$J_y = \frac{h^3 \cdot t}{12} + \frac{b \cdot h^2 \cdot t}{2} + \frac{b \cdot t^3}{6}, \text{ případně } J_y \doteq \frac{h^3 \cdot t}{12} + \frac{b \cdot h^2 \cdot t}{2}$$

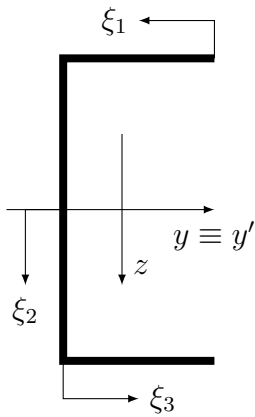
Pro $h = 2 \cdot b$ pak dostaneme:

$$J_y \doteq \frac{8}{3} \cdot b^3 \cdot t \quad (2)$$

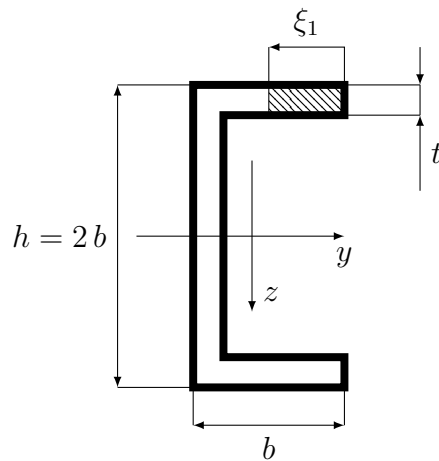
Zaved'me si lokální souřadnice ξ_i :

²Viz předchozí poznámka.

³Zde ponechme přesnou definici *tenkostěnného* profilu stranou; zjednodušeně řekněme, že rozměry stěny výrazně převyšují její tloušťku. Za určitých podmínek ostatně platí uvedený vztah i pro profily *netenkostěnné*.



Výpočet statického momentu *odříznuté části* probíhá následovně:



Je zřejmé, že výrazy pro statické momenty *odříznuté* plochy budou v jednotlivých úsecích postupně vyjádřeny:

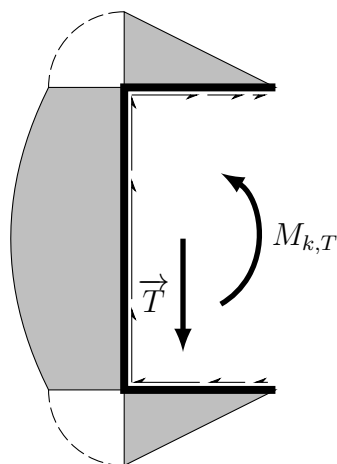
$$S(\xi_1) = b \cdot t \cdot \xi_1$$

$$S(\xi_2) = b^2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \xi_2^2 \right) \cdot t$$

(Pozor na zavedení ξ_2 !)

$$S(\xi_3) = b \cdot (b - \xi_3) \cdot t$$

Graf průběhu statického momentu:



Podobný průběh pak bude podle Žuravského vztahu (1) mít i smykové napětí ve stěně profilu:

$$\tau(\xi_1) = \tau_1 = \frac{T}{J_y} \cdot b \cdot \xi_1 \quad (3)$$

$$\tau(\xi_2) = \tau_2 = \frac{T}{J_y} \cdot \left(b^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \xi_2^2 \right) \right) \quad (4)$$

$$\tau(\xi_3) = \tau_3 = \frac{T}{J_y} \cdot b \cdot (b - \xi_3) \quad (5)$$

Jednoduchým výpočtem lze overřit, že:

$$\int_{(L)} \tau dS = T$$

Analogickým postupem ovšem dospějeme k tomu, že:

$$\int_{(L)} \vec{\rho} \times (\overline{\tau dS}) \neq 0$$

kde ρ je polohový vektor plochy dS k těžišti. Dosad' me z (3) až (5):

$$\int_0^b b \cdot \tau_1 \cdot t \cdot d\xi_1 + \int_{-b}^b \frac{b}{4} \cdot \tau_2 \cdot t \cdot d\xi_2 + \int_0^b b \cdot \tau_3 \cdot t \cdot d\xi_3 = \frac{5}{3} \cdot T \cdot \frac{b^4 \cdot t}{J_y}$$

Za J_y dosad' me z (2):

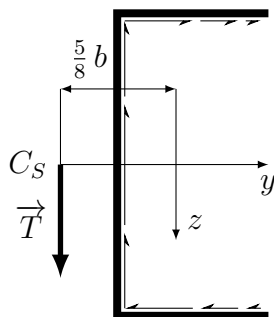
$$M_{k,T} = \frac{5}{8} \cdot b \cdot T$$

což je kroutící moment síly T působící v těžišti, resp. v ose prutu. Najít tzv. střed smyku průřezu pak je snadné. Položme:

$$T \cdot X_C = M_{k,T} = \frac{5}{8} \cdot b \cdot T$$

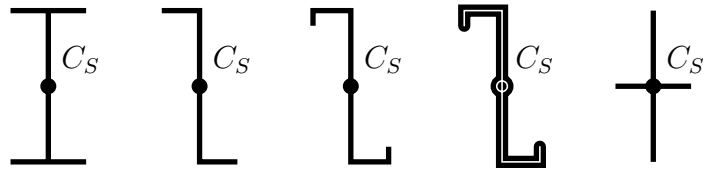
a poloha středu smyku je:

$$X_C = \frac{5}{8} \cdot b$$

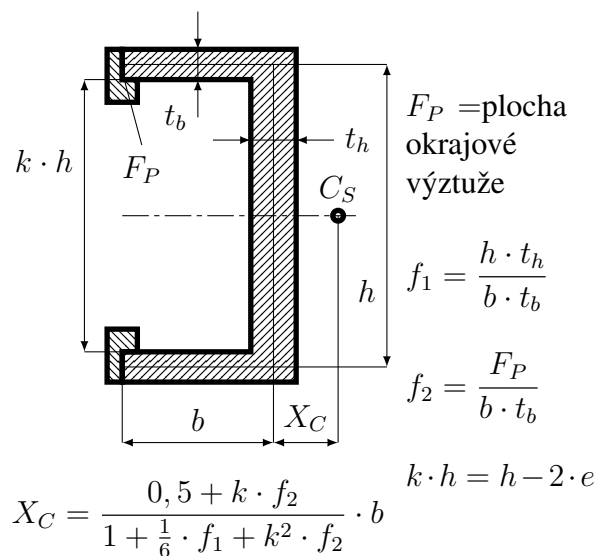
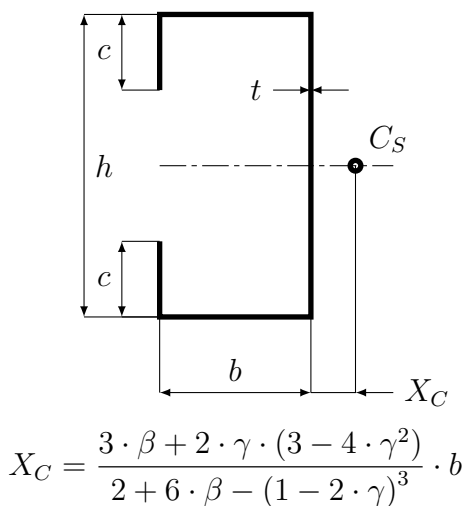
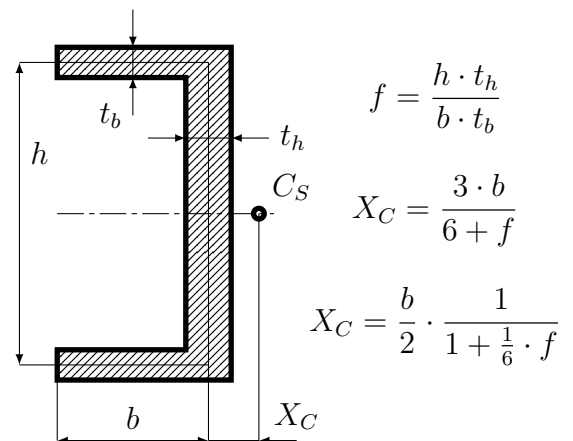
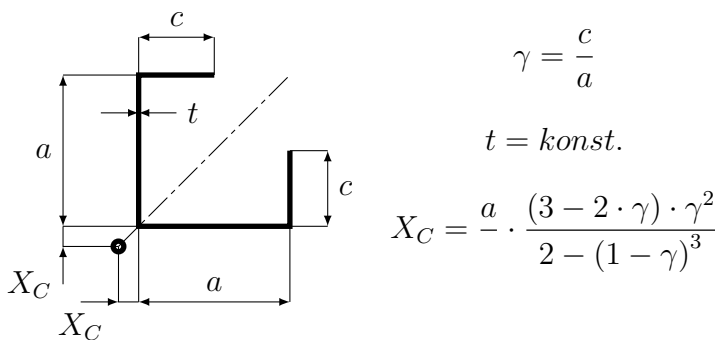
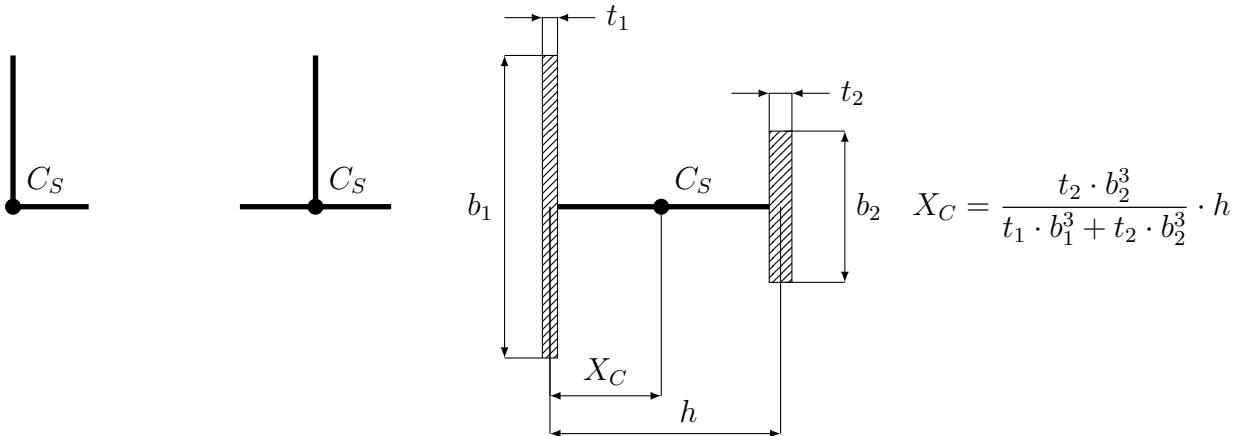


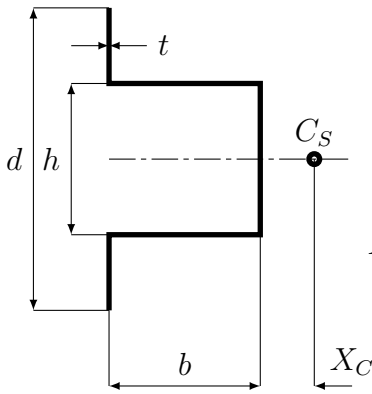
Příklady výpočtu středu smyku pro další profily

Průřezy s bodovou a dvouosou souměrností mají C_S v těžišti plochy řezu a středu souměrnosti.



Velmi tenkostěnné průřezy se zanedbatelnou ohybovou tuhostí stěny ve směru kolmém k její střednici mají polohu středu C_S ohybového smyku:





$t = konst.$

$$\frac{b}{h} = \beta, \quad \frac{d}{h} = \delta$$

$$X_C = \frac{3 \cdot \beta - 2 + \delta^2 \cdot (3 - \delta)}{\delta^3 + 6 \cdot \beta}$$

A diagram of a circular cross-section with radius R and thickness t . The angle subtended by the arc is β . The center of mass is marked as C_S . The distance from C_S to the right edge is labeled X_C .

$t = konst.$

$$\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow X_C = \frac{4}{\pi} \cdot R$$

$$\beta \rightarrow 0 \Rightarrow X_C \rightarrow 2 \cdot R$$

$$X_C = 2 \cdot R \cdot \frac{(\pi - \beta) \cdot \cos \beta + \sin \beta}{\pi - \beta + \sin \beta \cdot \cos \beta}$$