4. Znázorňování geometrických útvarů - rovinných obrazců a základních těles

4.1 Funkce názornosti

Zásada názornosti patří k jedné z nejstarších zásad. Již J. A. Komenský povýšil tuto zásadu na tzv. **zlaté pravidlo pro učitele** a kladl důraz na zapojení co nejvíce smyslů při výuce. Názornost ve vyučování plní funkci didaktickou a také motivační.

Názornost

- je didaktická zásada používaná zejména na 1. stupni ZŠ
- slouží k pochopení učiva a opírá se především o smyslové poznání
  a. zrakové (vizuální)
  b. hmatové (taktilní)
- důležitý je postup od konkrétního a nepodstatného k abstraktnímu a podstatnému
  - tj. od barvy, materiálu, tvrdosti materiálu přecházíme k vyvození abstraktních pojmů
    → strana, vrchol, vnitřní úhel až název rovinného obrazce;
    → stěna, vrchol, hrana, tvar až název základního tělesa.
- názornost provádíme především pomocí tzv. názorných prostředků

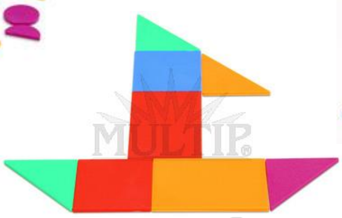
Používané názorné prostředky:

- **Modelování**
  - významná činnost umožňující pochopení především prostorových geometrických útvarů a vztahů;
  - v průběhu modelování dochází k objasňování a vysvětlování abstraktních geometrických pojmů a vztahů mezi nimi (nejlépe pokud žáci objeví co nejvíce pojmů a vztahů sami);
  - během modelování vznikají modely přímo před očima žáků nebo žáci vytváří modely sami;
  - papírové modely, modely těles ze špejlí a kaštanů, dnes ale také virtuální či počítačové modely atd.;
  - je i konstrukčním prostředkem ve školské geometrii.

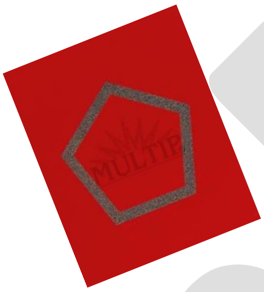
- **Modely**
  - žákům jsou předkládány modely, které jsou předem připravené, hotové
  - **typy modelů**:
    a) ***průmyslově vyráběné***

- dřevěné, plastové, pěnové či magnetické modely rovinných obrazců,



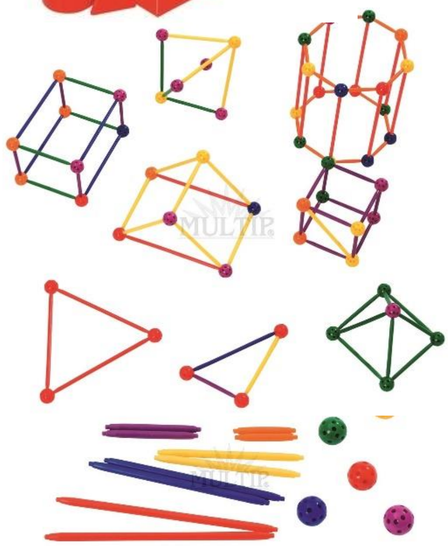
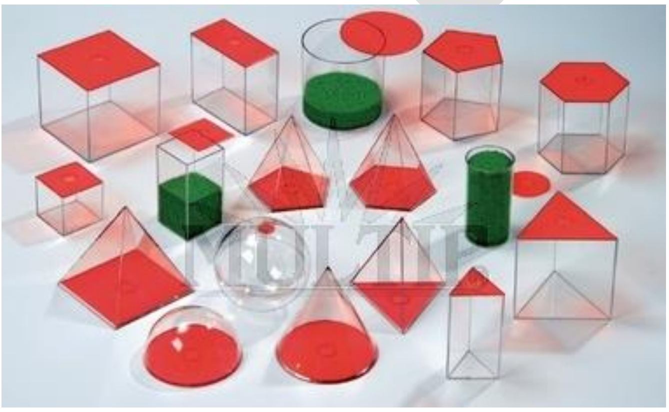


- dotykové geometrické tvary



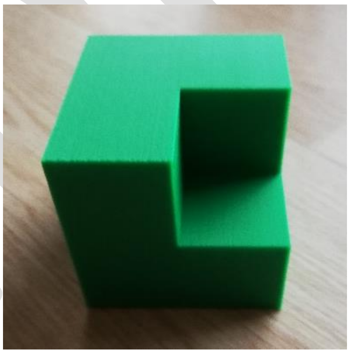

- dřevěné, plastové průhledné či drátěné modely těles,



- (didaktické) stavebnice

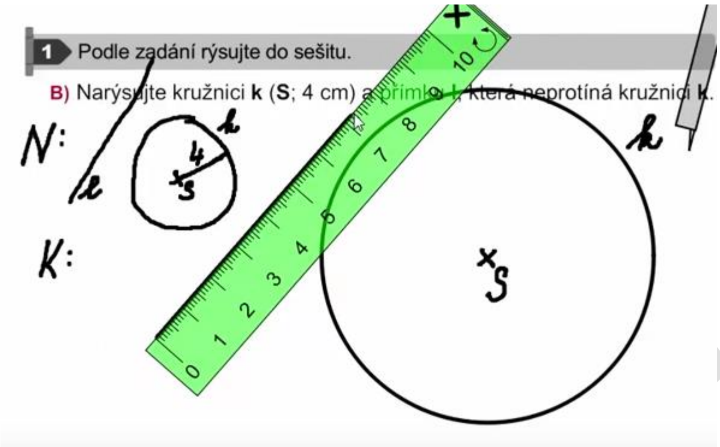

- 3D tisk

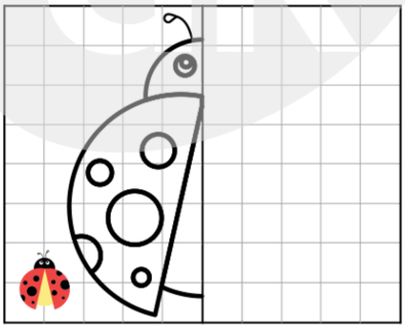
b) ***běžně dostupné*** - špejle, plastelína, modurit, papír a nůžky, krabice, gumičky, provázky, přírodní materiály (klacky, kaštany, …)

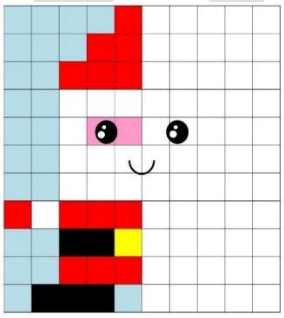
- je důležité používat různorodé a rozmanité modely, aby nedocházelo k jednostranné představě.

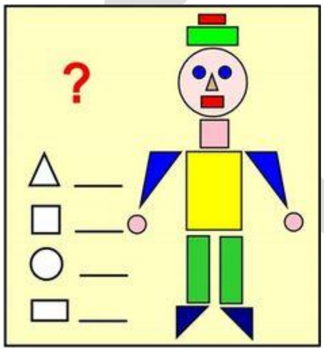
- **Črtání a rýsování** (vznikají před žákem nebo je žák vytváří sám)

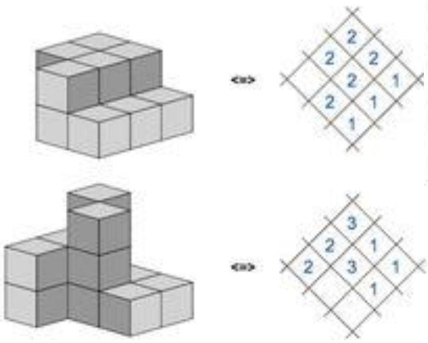


- **Obrazy a rysy** (jsou předem připravené)









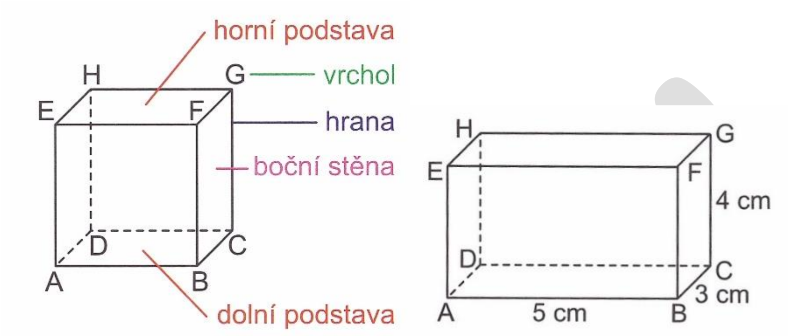
Postup používání názorných prostředků:

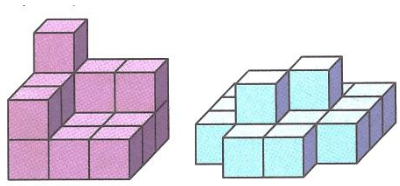
- od modelování a práce s modely se postupně přechází ke grafickému vyjadřování až k postupné abstrakci;
- vytváření pojmu je dlouhodobý proces konstruování poznávacích struktur, který má určité fáze a jehož jádrem jsou dva mentální kvalitativní zdvihy, ke kterým dochází vlivem okolních faktorů. Proces vytváření pojmu začíná motivací a vrcholí krystalizací a precizací. Zpočátku je vidění názorných prostředků schematické, neproporcionální, dochází k přechodu od nepodstatných vlastností (barva, materiál, tvrdost) k podstatným vlastnostem (tvar, stěny, hrany, vrcholy). Např. kostka (krychle) – z jednoho vrcholu vychází 3 hrany, stěna je čtyřúhelník atd.

Učitel by si měl uvědomovat rozdíl mezi: předmětem (míč), pojmem (koule), názvem („koule“) a modelem (dřevěná koule)

4.2 Zobrazování geometrických útvarů do roviny

Děti se na 1. stupni ZŠ učí zobrazovat rovinné geometrické obrazce, jako jsou trojúhelník, čtyřúhelníky (čtverec a obdélník), kružnice apod. Na druhou stranu se ale v učebnicích setkávají také již s obrázky prostorových útvarů, převážně základních nebo tzv. krychlových těles zakreslených do roviny. Viz ukázky z učebnic pro 5. ročník ZŠ.





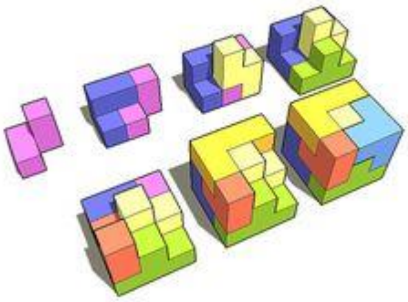
4.2.1 Deskriptivní geometrie

Deskriptivní geometrie

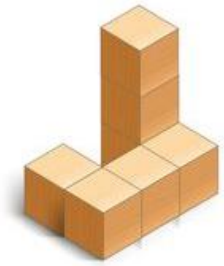
- je nazývána věda, která se zabývá zobrazováním prostorových útvarů (tj. např. základních těles) do roviny (tzv. průmětny)
- její podstatou je jednoznačný vztah mezi zobrazovaným 3D objektem a jeho rovinným průmětem, resp. jeho více rovinnými průměty. Zjednodušeně řečeno jde o zobrazování trojrozměrných útvarů na dvojrozměrnou nákresnu.
- pracuje s následujícími nejzákladnějšími objekty: body, přímky, roviny a úhly, dále pak s objekty z nich odvozených
- jejím obsahem jsou **axiomatika, planimetrie, stereometrie, zobrazovací metody** a konstruktivní geometrie křivek a ploch
- praktické využití našla všude tam, kde je třeba technicky přesně zakreslit různé prostorové útvary, tj. např. stavebnictví, architektura, strojírenství atd.
- má také zvláštní význam při rozvíjení prostorové představivosti, schopnosti „prostorového vidění“ a v utříbení geometrického a logického myšlení

Důležitými hledisky při zobrazování 3D útvarů do dvourozměrné nákresny jsou:

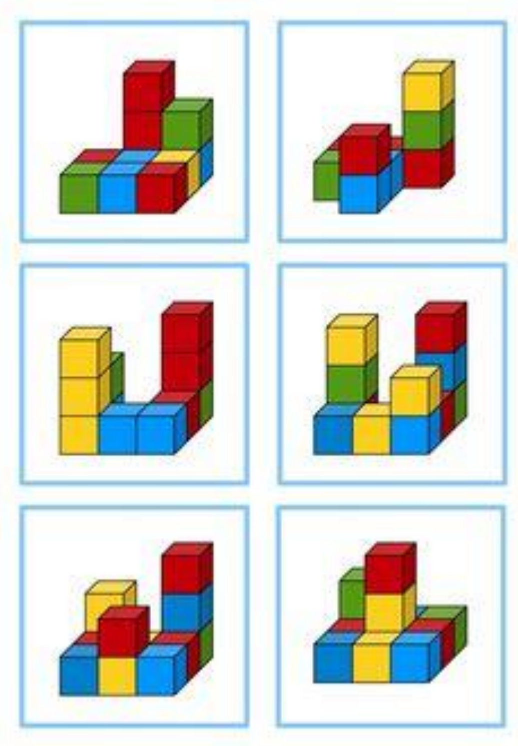
- názorná představa zobrazovaného útvaru
- zachování velikostí rozměrů (délek úseček a úhlů) zobrazovaného útvaru



zobrazení krychle a jejích částí
v trojúběžníkové perspektivě



zobrazení krychlového tělesa v pravoúhlé axonometrii – tzv. izometrii



zobrazení krychlových těles ve VRP

4.2.2 Promítání

K přesnému zobrazení prostorového útvaru na dvourozměrnou průmětnu (list papíru, rovina tabule, display PC, obrazovka tabletu apod.) slouží **promítání**. Přitom promítáním rozumíme speciální druh zobrazení prostoru na zvolenou rovinu – průmětnu.

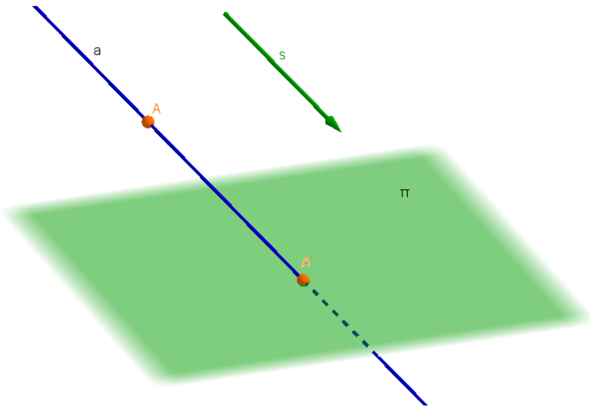
Rozlišujeme 2 základní druhy promítání:

a) **středové**

b) **rovnoběžné**

- rovnoběžné promítání je dáno rovinou π, kterou nazýváme **průmětna**, a směrem **s**, který je s rovinou π různoběžný;
- v rovnoběžném promítání sestrojíme obraz libovolného bodu prostoru neležícího v průmětně π následovně:

Nechť A je libovolný bod prostoru, který neleží v průmětně π. Proložíme-li bodem A přímku a rovnoběžnou se směrem **s** daného rovnoběžného promítání, je obrazem bodu A průsečík A' přímky a s průmětnou π.



Aplikací rovnoběžného promítání vznikají různé typy promítání, mezi ně řadíme např.:

- kótované promítání

- Mongeovo promítání
- pravoúhlou axonometrii
- obecnou axonometrii
- kosoúhlé promítání

Metody, které výše uvedená promítání zprostředkovávají, se nazývají **promítací** (někdy též **zobrazovací**) **metody**. Promítací metody dále umožňují

- útvary modelovat;
- studovat vzájemné vztahy mezi útvary;
- řešit rovinné a prostorové úlohy.

Volba souřadnicového systému nabízí útvary při promítání vhodně zvětšovat či zmenšovat.

Promítací metody ukazují, jak lze z rovinného obrazu prostorového útvaru odvodit vlastnosti tohoto 3D útvaru (např. jeho polohu v prostoru, jeho rozměry atd.). Tyto metody můžeme aplikovat jen tehdy, pokud každému obrazu v rovině budeme umět přiřadit jednoznačně jeho vzor v prostoru.

4.2.3 Volné rovnoběžné promítání

V uvedeném textu nebylo dosud zmíněno tzv. **volné rovnoběžné promítání** (VRP) a to z toho důvodu, protože u něj nejde o promítání v pravém smyslu slova. Ve VRP není totiž stanovena ani průmětna, ani směr promítání. VRP je spíše soustavou úmluv.

Přívlastek ***volné*** znamená, že krácení délek úseček může být „volné" (tj. libovolné). A protože VRP zachovává pravidla rovnoběžného promítání, je v jeho názvu uveden přívlastek ***rovnoběžné***. Jelikož jde o zobrazení trojrozměrného objektu na rovinu, tj. dvourozměrnou nákresnu, používáme i pojem ***promítání***.

4.2.3.1 Soustava úmluv platných při zobrazování ve volném rovnoběžném promítání

Jak již bylo zmíněno, VRP není řazeno mezi promítání, která jsou studována v rámci deskriptivní geometrie, ale je spíše soustavou úmluv. Tj. při zobrazování prostorových objektů v něm respektujeme následující úmluvy:

1. Rovinné objekty ležící v rovinách rovnoběžných s nákresnou se zobrazí ve skutečné velikosti a ve skutečném tvaru (zpravidla ve zvoleném měřítku).
2. Dvě rovnoběžné přímky se zobrazují buď jako dvě rovnoběžky anebo jako dva body.
3. Dvě rovnoběžné a shodné úsečky se zobrazují buď jako dvě rovnoběžné a shodné úsečky nebo jako dva body.
4. Jestliže obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$ a jestliže bod C je vnitřní bod úsečky AB, pak jeho obraz C' je vnitřním bodem úsečky $A'B'$ a pro velikosti úseček platí

$$\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|A'C'|}{|B'C'|}.$$

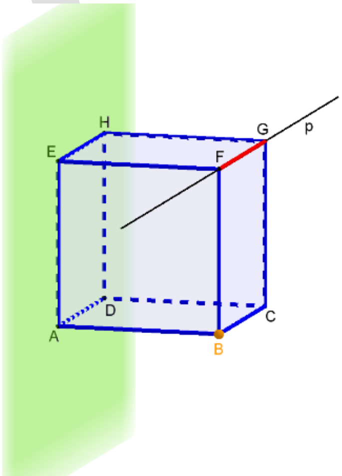
Tj. VRP zachovává dělicí poměr bodů. Speciálně platí, že střed úsečky se zobrazí do středu obrazu dané úsečky, těžiště trojúhelníku se zobrazí do těžiště obrazu daného trojúhelníku, body dělící úsečku AB na n stejných dílů se zobrazují do bodů, které dělí obraz $A'B'$úsečky AB na n stejných dílů apod. Přitom ovšem platí, že obrazem úsečky AB je opět úsečka.

Poznámka: Z uvedených úmluv ale neplyne, že se každé dvě shodné úsečky zobrazují jako shodné úsečky. Úsečka a její obraz nemusí být také shodné. Kolmé přímky se také obecně nezobrazují jako kolmé přímky.

Poznámka: Pro jednoduchost označujeme obvykle vzor (tj. bod, přímku v prostoru) stejným písmenem jako jeho obraz ve volném rovnoběžném promítání.

Pokud ale u rovinného obrazu zobrazovaného prostorového útvaru nebudou zachovány běžně užívané úmluvy (tj. pokud bude krácení úseček volné), pak nejsme schopni jednoznačně přiřadit k zobrazenému rovinnému obrazu jeho vzor v prostoru. A právě tím je porušen hlavní princip klasických promítacích metod.

4.2.3.2 Zobrazení základních objektů pomocí těles zobrazených ve VRP



Neužíváme-li při řešení prostorových konstrukčních úloh metod deskriptivní geometrie, určujeme obvykle dané body, přímky a roviny pomocí jednoduchých geometrických těles, nejčastěji pomocí hranatých těles, tj. pomocí hranolů a jehlanů. Říkáme, že dané body, přímky a roviny jsou s těmito tělesy spjaty. Stěny zobrazeného tělesa jsou části rovin, hrany části přímek, vrcholy zobrazují body. Z toho plyne, že **v prostorové geometrii můžeme při sepětí základních geometrických objektů s tělesy zobrazit vždy pouze jen části přímek a rovin**.

Při řešení prostorových polohových úloh ve VRP stačí znát pouze tvar tělesa (tj. vzájemnou polohu jeho vrcholů, hran a stěn), s nímž jsou dané objekty spjaty. Avšak při řešení prostorových metrických úloh je kromě znalosti tvaru tělesa také nutné znát rozměry daného tělesa (tj. skutečné délky jeho hran, skutečný tvar jeho stěn, velikost jeho výšky apod.).

4.2.3.3 Zobrazení rovinných obrazců a základních těles ve VRP

Obrázky rovinných, ale především prostorových útvarů sestrojených ve VRP jsou názorné a poměrně konstrukčně jednoduché. Volného rovnoběžného promítání se užívá především při zobrazování základních těles a jejich částí.

Výše jsme uvedli obecné úmluvy, podle nichž se zobrazují prostorové útvary ve VRP. Nyní si ukážeme, jak se podle zmíněných úmluv zobrazují základní tělesa, především pravidelné hranoly a jehlany.

Při zobrazování těles ve VRP se budeme snažit dodržovat následující pravidla:

1. tělesa stavíme do výhodných poloh vzhledem k nákresně, tj.

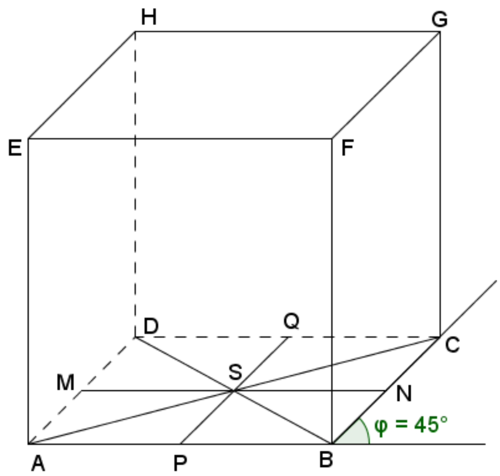
   a) jejich podstavy leží buď v rovině kolmé k nákresně (mnohem obvykleji) anebo v rovinách rovnoběžných s nákresnou;

   b) pravidelný hranol nebo jehlan se sudým počtem bočních stěn zobrazíme snadno v poloze, v níž je rovina nákresny rovnoběžná s některou rovinou souměrnosti daného tělesa.

   Toto postavení tělesa je také výhodné proto, že z některých jeho částí (hrany, úhlopříčky mnohoúhelníkové podstavy umístěné v poloze rovnoběžné s nákresnou jsou ve skutečné velikosti či v příslušném měřítku) snadno odečteme skutečné rozměry zobrazeného tělesa. Tj. toto postavení tělesa je vhodné zejména tehdy, chceme-li na obrázku řešit metrické úlohy.

2. přímky kolmé k nákresně se zobrazí jako přímky, jejichž odchylka od vodorovného směru je $\varphi = (0^\circ, 90^\circ)$, zpravidla $\varphi = 45^\circ$.

3. úsečky ležící na kolmicích k nákresně zkracujeme ve zvoleném poměru $0 < k \leq 1$, obvykle $k = \frac{1}{2}$, tj. $|BC| = \frac{1}{2}\ |AB|$.

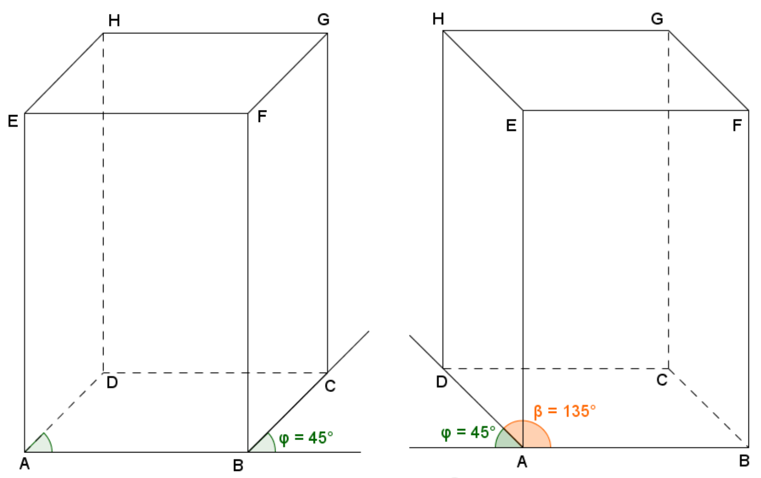


Zobrazení kvádru a krychle ve VRP

1. způsob zobrazení kvádru *ABCDEFGH*

Kvádr *ABCDEFGH* budeme předpokládat v poloze, ve které je jeho stěna *ABFE* rovnoběžná s nákresnou. Podle 1. úmluvy nakreslíme tuto stěnu ve skutečném tvaru a velikosti (nebo v určitém měřítku), tzn. zobrazíme obdélník *ABFE.*

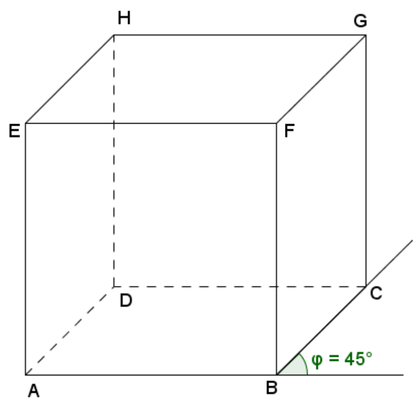
Protože jsou ve skutečnosti hrany *AD, BC, FG* a *EH* shodné a rovnoběžné, nakreslíme je podle 3. úmluvy jako rovnoběžné a shodné úsečky a to tak, aby obrazy stěn byly rovnoběžníky. Polohu a velikost jedné z těchto úseček (např. *AD*) můžeme zvolit libovolně. Výhodné je ji zvolit tak, aby $\varphi = |\angle BAD| = 45^\circ$, jak jsme uvedli ve 2. pravidle, anebo aby $\varphi = |\angle BAD| = 135^\circ$. Obraz úsečky *AD* je též vhodné zvolit menší, než je délka hrany *AD* ve skutečnosti. Obvykle se volí velikost obrazu úsečky *AD* rovna polovině velikosti obrazu úsečky *AB* (viz 3. pravidlo). Zvolíme tedy obraz úsečky *AD* a sestrojíme obrazy *AD* // *BC* // // *FG* // *EH* a $|AD| = |BC| = |FG| = |EH|$ tak, aby obrazy stěn byly rovnoběžníky. Obrázek kvádru *ABCDEFGH* ve VRP pak snadno dokončíme. Při jeho dokreslení však ještě musíme respektovat viditelnost jeho hran.



Zobrazení kvádru ve volném rovnoběžném promítání

2. způsob zobrazení kvádru *ABCDEFGH*

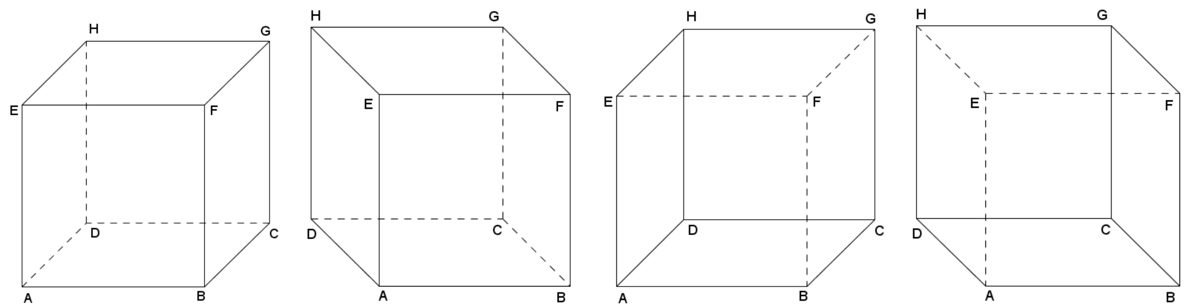
Nejprve sestrojíme obraz podstavy kvádru, tj. rovnoběžník *ABCD*, a pak sestrojíme rovnoběžné a shodné úsečky *AE, BF, CG, DH* tak, aby platilo, že $AE \perp AB$. Je-li kromě toho také |*AE*| = |*AB*|, získáme obrázek krychle.



Zobrazení krychle ve volném rovnoběžném promítání

Je-li viditelnost obrazů hran krychle vyznačena jako na následujících obrázcích (uvažováno zleva doprava) mluvíme o

nadhledu zprava, **nadhledu zleva**, **podhledu zleva**, **podhledu zprava**.



Zobrazení krychle v různých pohledech

Při zobrazování kvádru či krychle nejčastěji užíváme nadhledu zprava.

Zobrazení hranolů ve VRP

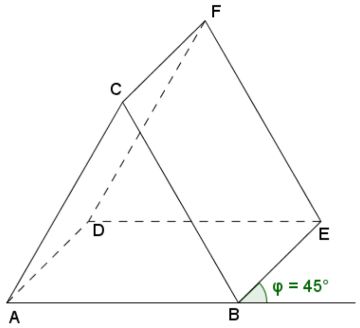
A) Zobrazení trojbokého hranolu *ABCDEF*

1. způsob zobrazení trojbokého hranolu *ABCDEF*

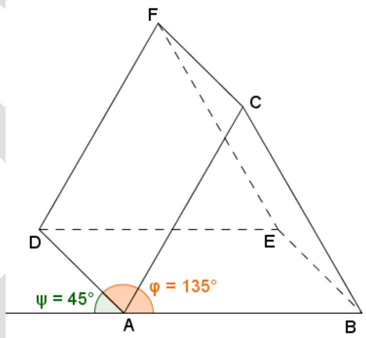
Umístíme-li trojboký hranol tak, že rovina jeho podstavy *ABC* je rovnoběžná s nákresnou, sestrojíme při jeho zobrazování ve VRP obraz trojúhelníkové podstavy *ABC* ve skutečné velikosti (anebo v daném měřítku). Potom zobrazíme obrazy pobočných hran *AD, BE* a *CF*. Protože jsou pobočné hrany shodné a rovnoběžné, sestrojíme je jako shodné a rovnoběžné úsečky (viz 3. úmluva) a to tak, aby obrazy pobočných stěn byly rovnoběžníky.

Na obr. a) je zobrazen pravidelný trojboký kolmý hranol v nadhledu zprava, na obr. b) v nadhledu zleva.

a)



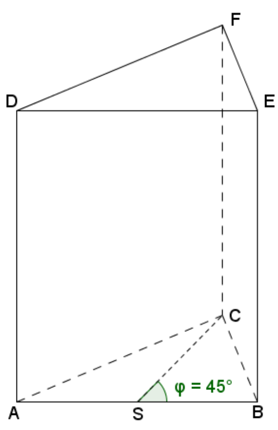
b)

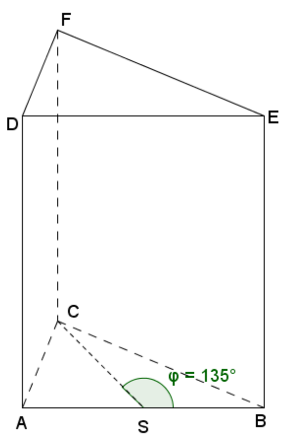


Zobrazení trojbokého hranolu s podstavou v průčelné poloze

2. způsob zobrazení trojbokého hranolu *ABCDEF*

Pravidelný trojboký kolmý hranol *ABCDEF* můžeme zobrazit také v poloze, ve které je jedna jeho pobočná stěna rovnoběžná s nákresnou. Tato stěna se zobrazí ve skutečné velikosti (anebo v daném měřítku viz 1. úmluva), tj. jako obdélník, např. obdélník *ABDE.* Obraz trojúhelníkové podstavy hranolu nakreslíme jako libovolný trojúhelník. Výhodné je nakreslit obraz *ABC* trojúhelníkové podstavy hranolu tak, aby se výška trojúhelníku *ABC* zobrazila pomocí úsečky *CS,* která má tu vlastnost, že její délka je rovna polovině skutečné velikosti výšky trojúhelníku *ABC* spuštěné z vrcholu *C* na stranu *AB* a že je úhel $\varphi = |\angle CSB| = 45^\circ$ nebo $\varphi = |\angle CSB| = 135^\circ$. Přitom bod *S* je střed obrazu úsečky *AB.*





Zobrazení trojbokého hranolu s jednou stěnou v průčelné poloze

B) Zobrazení pravidelného pětibokého hranolu *ABCDEA´B´C´D´E´*

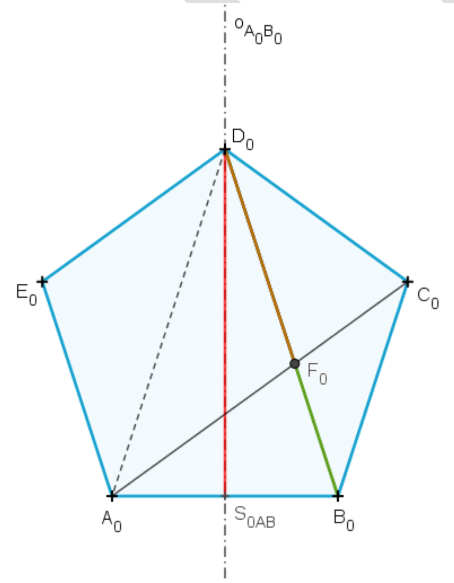
Pravidelný pětiboký hranol zobrazíme tak, aby jeho pětiúhelníkové podstavy byly umístěny v rovinách kolmých k nákresně a aby jedna jeho pobočná stěna, např. *ABB´A´* ležela v rovině rovnoběžné s nákresnou.

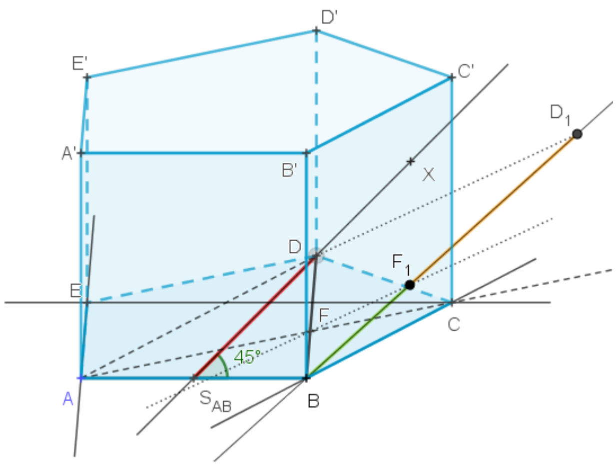
Konstrukci začněme zobrazením pravidelného pětiúhelníku *ABCDE* ve VRP. Nejprve narýsujeme pravidelný pětiúhelník $A_0B_0C_0D_0E_0$ ve skutečné velikosti. Určíme střed S_{0AB} úsečky A_0B_0, dále sestrojíme úsečku $S_{0AB}D_0$, která je incidentní s osou úsečky A_0B_0. Pro zobrazení pravidelného pětiúhelníku ve VRP sestrojíme úsečku *AB*, jejíž délka je shodná s délkou úsečky A_0B_0. Určíme střed S_{AB} úsečky *AB.* Narýsujeme přímku procházející bodem S_{AB} tak, aby s úsečkou *AB* svírala úhel 45°, tj. $|\angle BS_{AB}X| = 45°$. Na polopřímku $S_{AB}X$ naneseme od bodu S_{AB} úsečku, jejíž délka je rovna polovině délky úsečky $S_{0AB}D_0$. Druhý koncový bod je vrcholem *D* zobrazovaného pravidelného pětiúhelníku.

Průsečík úhlopříček A_0C_0 a B_0D_0 označíme jako bod F_0. Bod F_0 dělí úsečku B_0D_0 ve stejném poměru jako dělí bod *F* úsečku *BD.* Bod *F* sestrojíme následovně. Bodem *B* vedeme libovolnou polopřímku, na níž určíme body F_1, D_1 takovým způsobem, že $|BF_1| = |B_0F_0|$ a $|BD_1| = |B_0D_0|$. Bod *F* je průsečíkem přímky vedené bodem F_1 rovnoběžně s úsečkou D_1D a úhlopříčky *BD.*

Dále využijeme rovnoběžnosti přímek *AD* a *BC.* Tzn. bod *C* vznikne jako průsečík polopřímky *AF* s přímkou vedenou bodem *B* rovnoběžně s přímkou *AD.* Poslední vrchol *E* pravidelného pětiúhelníku *ABCDE* leží na rovnoběžkách vedených bodem *C* s přímkou *AB* a bodem *A* s přímkou *BD*.

Obrazy pobočných hran pravidelného pětibokého hranolu jsou shodné a navzájem rovnoběžné úsečky; přitom stěna *ABB´A´* se jeví ve skutečné velikosti, jak jsme předpokládali výše.





Zobrazení pravidelného pětibokého hranolu s jednou boční stěnou ležící v průčelné poloze

C) Zobrazení pravidelného šestibokého hranolu *ABCDEFA´B´C´D´E´F´*

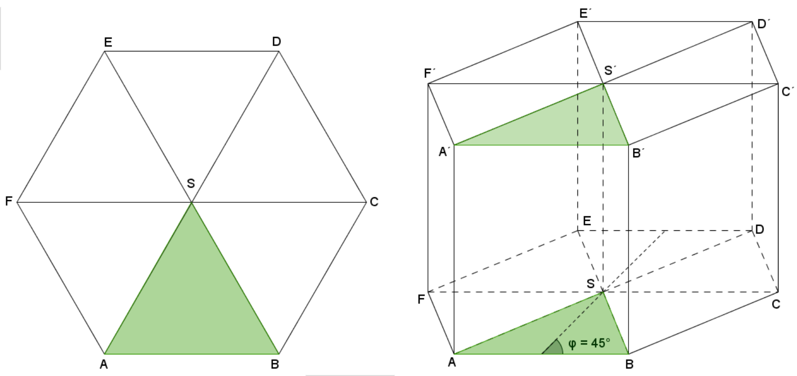
Pravidelný šestiboký hranol, jehož jedna pobočná stěna, např. *ABB´A´*, leží v rovině rovnoběžné s nákresnou, zobrazíme poměrně snadno, uvědomíme-li si, že je složen ze šesti shodných pravidelných trojbokých hranolů se společnou hranou *SS´,* kde *S, S´* jsou středy podstav daného hranolu.

Nejprve narýsujeme šestiúhelníkovou postavu $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ daného šestibokého hranolu ve skutečné velikosti. Trojúhelníková podstava *SAB* jednoho ze šesti pravidelných trojbokých hranolů, z nichž je daný šestiboký hranol složen, je na obrázku vyšrafována. Obraz *SAB* této trojúhelníkové podstavy sestrojíme následovně: obraz úsečky *AB* je zobrazen ve skutečné velikosti, neboť umístění obrazu úsečky *AB* bylo zvoleno rovnoběžně s nákresnou (viz 1. úmluva); výšku *SM,* spuštěnou z bodu *S* ke straně *AB,* sestrojujeme v poloviční velikosti délky obrazu strany *AB* a to tak, aby její obraz svíral s obrazem strany *AB* úhel $\varphi = |\angle SMB| = 45^\circ$ nebo $\varphi = |\angle SMB| = 135^\circ$. Obraz *ABCDEF* pravidelného šestiúhelníku dokončíme na základě vlastností šestiúhelníku, tj. každé dvě jeho protější strany jsou rovnoběžné s jednou úhlopříčkou, která prochází středem šestiúhelníku, tj. *BC // AS // EF*, *AF // BS // CD*, *AB // CS // DE.* Můžeme shrnout, že obraz pravidelného šestiúhelníku je ve VRP souměrný podle jeho středu *S.*

Obrazy pobočných hran pravidelného šestibokého hranolu jsou shodné a rovnoběžné úsečky; přitom stěna *ABB´A´* se jeví ve skutečné velikosti, jak jsme předpokládali výše.

Rovina *CC´F´F* je rovnoběžná s rovinou stěny *ABB´A´* a je rovinou souměrnosti daného hranolu. Nákresna je tedy rovnoběžná s rovinou souměrnosti daného tělesa.

a) b)

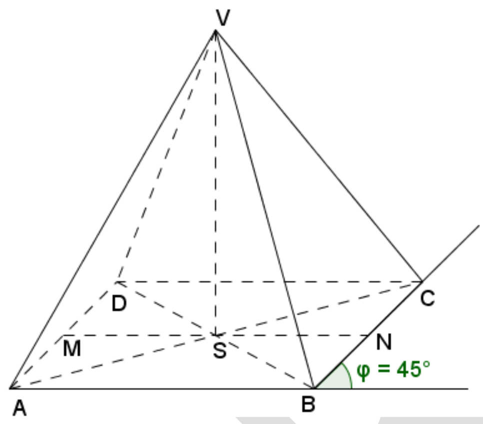


a) *Šestiúhelníková podstava ve skutečném tvaru a velikosti*
b) *Zobrazení šestibokého hranolu s rovinou souměrnosti hranolu rovnoběžnou s nárysnou*

Zobrazení pravidelných jehlanů ve VRP

a) Zobrazení pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV*

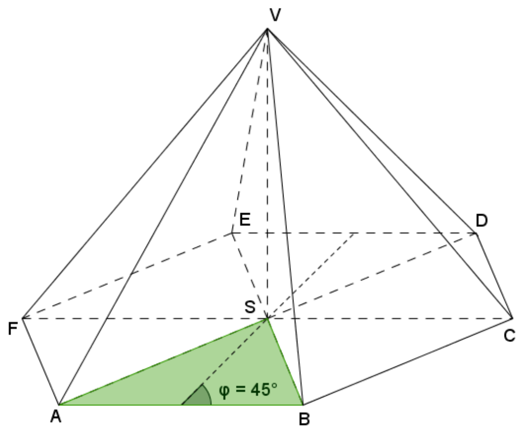
Pravidelný čtyřboký jehlan je nejvýhodnější zobrazit v té poloze, v níž je nákresna rovnoběžná s jeho rovinou souměrnosti. Přitom rovina souměrnosti jehlanu obsahuje střední příčku *MN* (rovnoběžnou např. s hranou *AB*) čtvercové podstavy *ABCD* jehlanu a výšku *SV* jehlanu, kde *S* je střed čtvercové podstavy *ABCD*. Potom přímka *AB* je rovnoběžná s nákresnou a úsečka *AB* se zobrazí ve skutečné velikosti. Obrazem čtverce *ABCD* je rovnoběžník *ABCD*, v němž se strana *AB* jeví ve skutečné velikosti. Přitom podle dříve zmíněných pravidel platí, že $\varphi = |\angle BAD| = 45^\circ$ nebo $\varphi = |\angle BAD| = 135^\circ$ a $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$. Výška *SV* se zobrazí ve skutečné velikosti kolmo na obraz úsečky *AB.*



Zobrazení pravidelného čtyřbokého jehlanu s rovinou souměrnosti jehlanu rovnoběžnou s nárysnou

b) Zobrazení pravidelného šestibokého jehlanu *ABCDEFV*

Pravidelný šestiboký jehlan *ABCDEFV* zobrazíme obdobně jako pravidelný šestiboký hranol, tj. v poloze, v níž je rovina *CFV* jeho souměrnosti rovnoběžná s nákresnou. Rovina *CFV* souměrnosti jehlanu obsahuje výšku *SV* jehlanu, která se tak zobrazí ve skutečné velikosti.

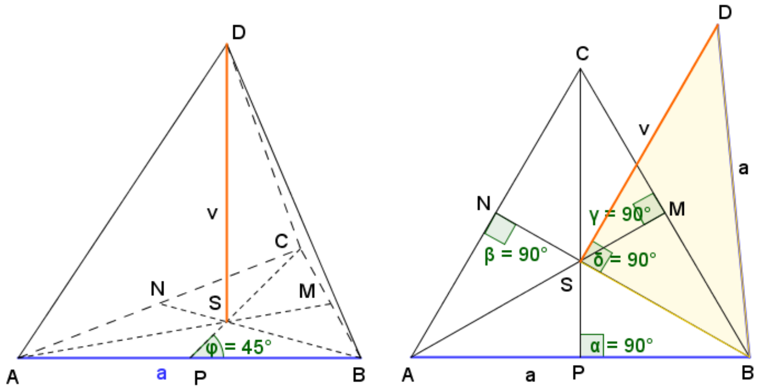


Zobrazení pravidelného šestibokého jehlanu s rovinou souměrnosti jehlanu rovnoběžnou s nárysnou

c) Zobrazení pravidelného čtyřstěnu ve VRP

Pravidelný čtyřstěn *ABCD* zobrazíme ve VRP tak, aby nákresna byla rovnoběžná s přímkou *AB*, kde *AB* je hrana čtyřstěnu, a s výškou *DS* ke stěně *ABC*. Dle 1. úmluvy se obraz *AB* hrany čtyřstěnu i obraz výšky *DS* zobrazí ve skutečné velikosti. Rovnostranný trojúhelník *ABC* zobrazíme tak, jak bylo popsáno u zobrazení trojbokého hranolu. Jeho střed *S* je průsečík jeho výšek. Protože výšky pravidelného trojúhelníku procházejí středy jeho stran, budou i jejich obrazy *AM, BN* a *CP* procházet středy *M, N* a *P* obrazů stran *AB, BC* a *AC*.

Přímky *AB, SD* jsou rovnoběžné s nákresnou a přímka *SD* je kolmá k přímce *AB,* neboť přímka *SD* je kolmá k rovině *ABC,* pak je i obraz úsečky *SD* kolmý k obrazu úsečky *AB.* Přitom úsečka *SD* se zobrazí ve skutečné velikosti, její obraz je tedy roven výšce čtyřstěnu. Skutečnou velikost $v = |SD|$ výšky sestrojíme jako odvěsnu pravoúhlého trojúhelníka *BSD* s přeponou *BD,* rovnou hraně čtyřstěnu, a s odvěsnou *BS* rovnou $\frac{2}{3}$ výšky *BN* rovnostranného trojúhelníku *ABC.*

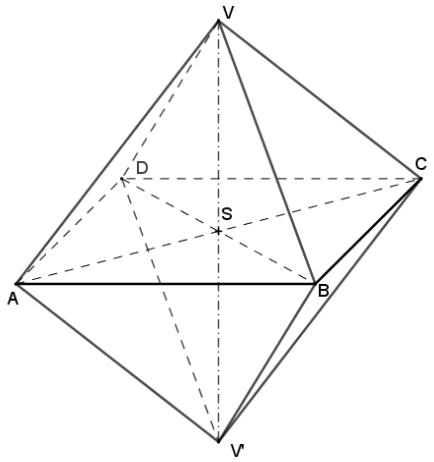


Zobrazení pravidelného čtyřstěnu ve VRP

d) Zobrazení pravidelného osmistěnu ve VRP

Osmistěn *ABCDVV´* umístíme tak, aby jeho rovina souměrnosti obsahující úhlopříčku *VV´* a střední příčku čtverce *ABCD* byla rovnoběžná s nákresnou. Potom protější strany *AB*, *CD* čtverce *ABCD* a úhlopříčka *VV´* se zobrazí ve skutečné velikosti. Přitom platí, že obraz úsečky *VV´* je kolmý na obraz úsečky *AB.* Obraz čtverce *ABCD* je rovnoběžník, v němž je $\varphi = |\angle BAD| = 45^\circ$ nebo $\varphi = |\angle BAD| = 135^\circ$ a délka strany $|BC| = \frac{1}{2}\ |AB|$.

Všechny úhlopříčky osmistěnu jsou shodné, proto je tedy úsečka *VV´* rovna úhlopříčce čtverce *ABCD* o straně *AB*. Je-li bod *S* střed osmistěnu *ABCDVV´,* je $|SV| = |SV'|$, což je rovno polovině úhlopříčky čtverce *ABCD.*



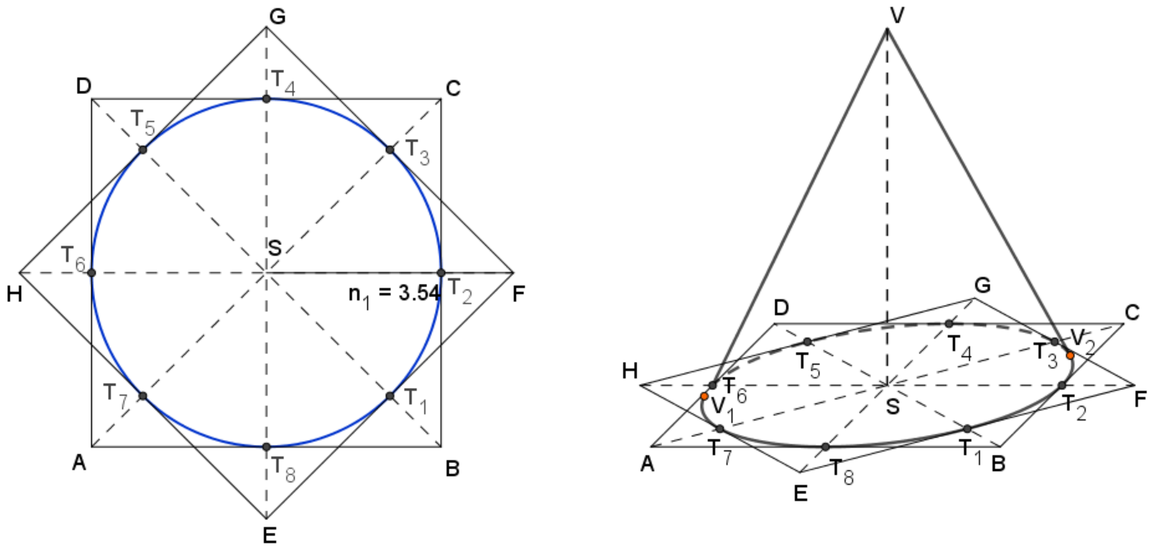
Zobrazení pravidelného osmistěnu ve VRP

Zobrazení rotačního kužele ve VRP

Obrazem podstavné kružnice rotačního kužele je elipsa. K zobrazení elipsy použijeme tzv. osmibodové konstrukce.

Osmibodovou konstrukci elipsy provedeme následovně: kružnici k (S, r) vepíšeme do soustředných čtverců $A_0B_0C_0D_0$, $E_0F_0G_0H_0$, přitom čtverec $E_0F_0G_0H_0$ je otočen oproti čtverci $A_0B_0C_0D_0$ kolem jejich středu S_0 o úhel $\varphi = 45^\circ$. Získáme tak osm bodů dotyku kružnice se stranami daných čtverců.

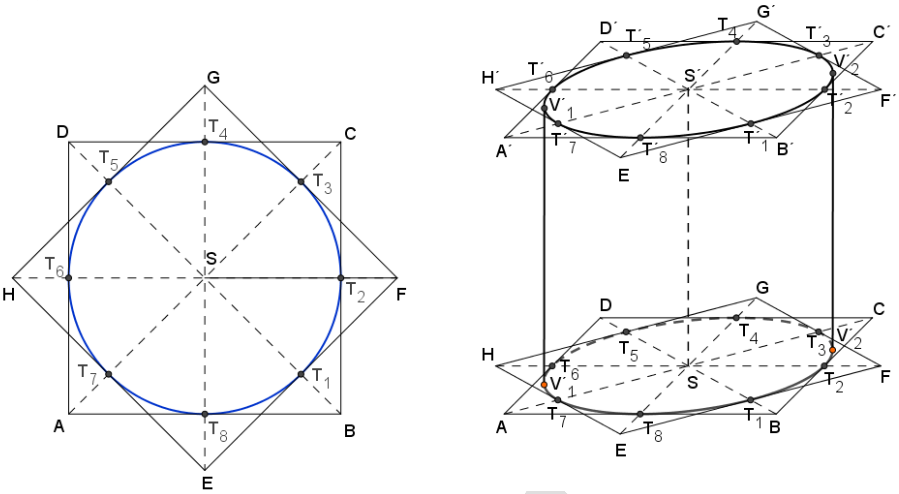
Oba čtverce umístíme tak, aby úsečky *AB, CD, HF* byly rovnoběžné s nákresnou (dle 1. úmluvy se obrazy úseček zobrazí rovnoběžně a nezkresleně) a aby úsečky *AD, BC, EG* byly kolmé k nákresně, tj. obrazy úseček *AB, CD, HF* se zobrazí nezkresleně a obrazy úseček *AD, BC, EG* svírají s obrazem úsečky *AB* úhel $\varphi = 45^\circ$ a jejich velikost je rovna polovině velikosti obrazu úsečky *AB.* Středy obrazů jednotlivých stran čtverců jsou body hledané elipsy. Středem *S* rovnoběžníku *ABCD* vedeme kolmici k obrazu úsečky *AB* a naneseme na ni nezkreslenou délku výšky kužele. Sestrojíme tak obraz *V* vrcholu kužele. Obrysové površky sestrojíme pomocí tečen vedených k elipse z bodu *V.* Obrys kužele je tvořen částí elipsy mezi body dotyku s elipsou a sestrojenými obrysovými površkami.



Zobrazení rotačního kužele ve VRP

Zobrazení rotačního válce ve VRP

Válec zobrazíme ve VRP analogicky jako kužel. Sestrojený bod *V* je v případě válce středem horní kruhové podstavy. Ta se ve VRP zobrazí shodně jako dolní kruhová podstava. Obrysovými površkami válce jsou úsečky rovnoběžné s osou válce a dotýkající se obou elips.

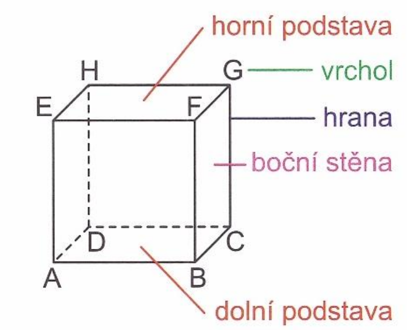


Zobrazení rotačního válce ve VRP

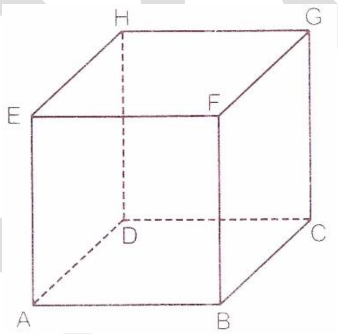
4.2.4 Porušení úmluv při zobrazení těles v učebnicích pro ZŠ

Jak již bylo uvedeno výše, pokud u rovinného obrazu zobrazovaného prostorového útvaru, tj. např. geometrického tělesa nejsou ve volném rovnoběžném promítání zachovány běžně užívané úmluvy (tj. pokud bude krácení úseček volné), pak nejsme schopni jednoznačně přiřadit k zobrazenému rovinnému obrazu jeho vzor v prostoru. Volné krácení úseček lze najít např. v následujících učebnicích matematiky pro 1. stupeň ZŠ.

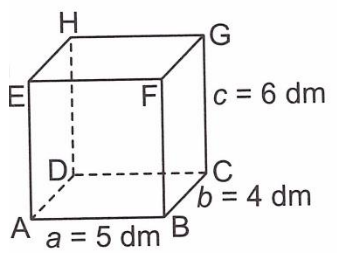
- VACKOVÁ, I. A kol.: *Matematika pro 5. ročník ZŠ.* SPN, Praha 2016. ISBN 978-80-7235-575-4



str. 140 (krychle?)

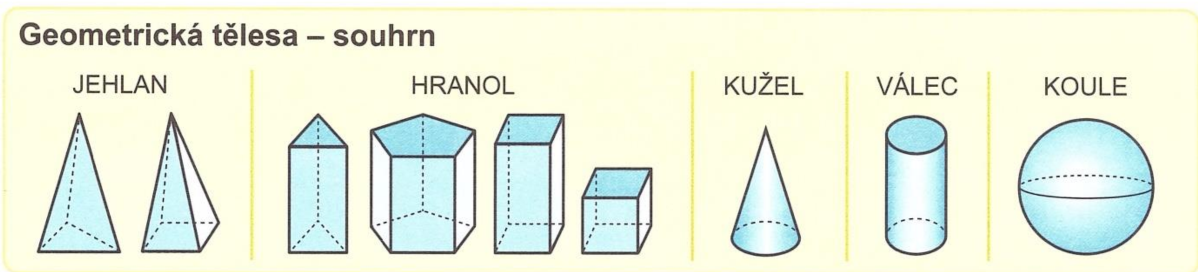


str. 141 (krychle?)

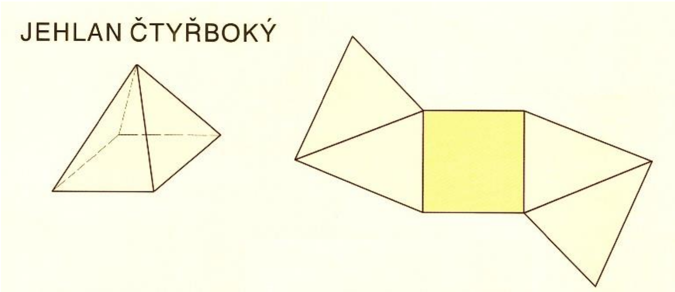


str. 144 (kvádr?)

- NOVOTNÝ, M. – NOVÁK, F.: *Geometrie pro 5. ročník – Matýskova matematika*. NOVÁ ŠKOLA, Brno 2019. ISBN 978-80-7600-016-2 (str. 140)



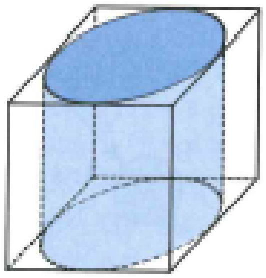
- JUSTOVÁ, J.: *Matematika pro 5. ročník ZŠ – 3. díl.* Alter, Všeň 2012. ISBN 978-80-7245-214-9



zadní obálka učebnice

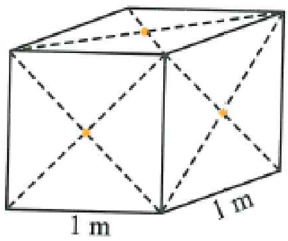
- PŮLPÁN, Z. – TREJBAL, J.: *Matematika pro ZŠ – 8 – Geometrie*. SPN, Praha 2009. ISBN 978-80-7235-421-4.

str. 82: „Krychli s délkou hrany *a* = 10 cm je vepsán válec maximálního objemu (viz obr.). Kolik procent objemu krychle zaujímá objem válce?“



- PŮLPÁN, Z. – ČIHÁK, M. – TREJBAL, J.: *Matematika pro ZŠ – 9 – Geometrie*. SPN, Praha 2010. ISBN 978-80-7235-489-4.

str. 74: „Do krychle s hranou délky 1 m je vepsána koule dotýkající se středů všech stěn krychle (viz obr.). Kde v tomto případě leží střed koule?) Určete velikost povrchu této koule?“

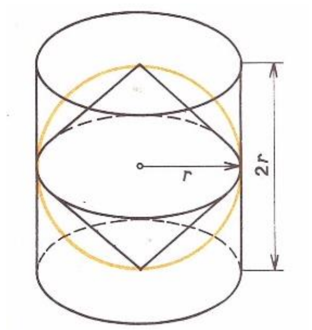


4.2.5 Chybná zobrazení těles v učebnicích pro ZŠ

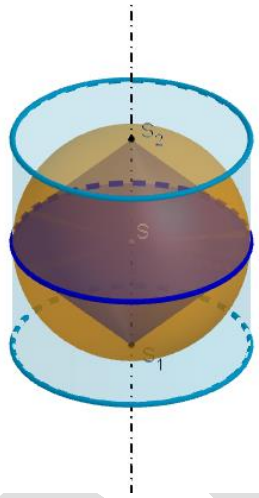
V učebnicích pro základní školy se však někdy mohou objevit i taková zobrazení těles, která jsou v rozporu se skutečností. Jedním takovým rozporným zobrazením je zobrazení dvojkužele v kouli v následující učebnici.

Müllerová, J. a kol.: *Matematika pro 7. ročník ZŠ – II. díl.* SPN, Praha 1985.

str. 159: „Je dána koule o poloměru *r*. Opíšeme jí válec s podstavou o poloměru *r* a výškou 2*r*; vepíšeme do něho „dvojkužel“ o poloměru *r* a výškou jednoho kužele také *r*.“



Dvojkužel by měl být v kouli zobrazen následujícím způsobem:



Použité zdroje:

https://www.multip.cz/ucebni-pomucky-pro-geometrii

4.2.6 Příklady k procvičování

Příklad 4.1:

Ve VRP zobrazte krychli s délkou hrany 5 cm.

Příklad 4.2:

Ve VRP zobrazte pravidelný trojboký hranol s délkou podstavné hrany (strany rovnostranného podstavného trojúhelníku) 5 cm a s výškou v = 7 cm hranolu.

Poznámka: Hranol rýsujte tak, aby jedna z jeho obdélníkových stěn byla postavena v průčelné poloze (tj. v rovině rovnoběžné s nákresnou) a trojúhelníková podstava v rovině kolmé k nákresně.

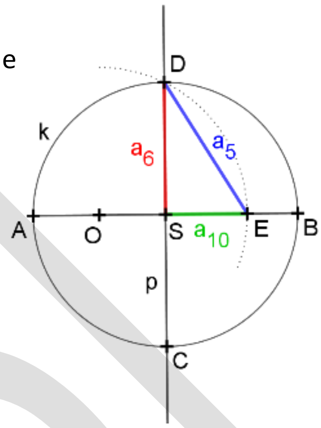
Příklad 4.3:

Ve VRP zobrazte pravidelný pětiboký hranol s poloměrem kružnice opsané pravidelné pětiúhelníkové podstavě rovným 3 cm a s výškou hranolu $v = 12$ cm.

Poznámka: Hranol rýsujte tak, aby pětiúhelníková podstava byla postavena v průčelné poloze, tj. v rovině rovnoběžné s nákresnou, a přitom volte jednu ze stran pravidelného pětiúhelníku ve vodorovné poloze. Od ní odměřujte úhel zkreslení hloubkových přímek. Výška tělesa a pobočné hrany hranolu jsou v daném postavení hloubkovými přímkami.

Návod na sestrojení pravidelného pětiúhelníku je přiložen. Konstrukce není obtížná, ale je náročná na přesnost.

Konstrukce pravidelného pětiúhelníku (desetiúhelníku)



Pro vyrýsování pravidelného pětiúhelníku (desetiúhelníku) sestrojme
1) úsečku *AB* se středem *S;*
2) kružnici *k* (*S*, $r = |AS|$);
3) střed *O* úsečky *AS,* tj. platí $|AO| = |OS|$;
4) kolmici *p* k úsečce *AB* vedenou bodem *S;*
5) body *C, D* jako průsečíky přímky *p* a kružnice *k;*
6) kružnici *l* (*O*, $r = |OD|$);
7) bod *E* jako průsečík kružnice *l* a úsečky *SB;*
8) délka úsečky *DE* je strana pravidelného pětiúhelníku;
délka úsečky *SE* je strana pravidelného desetiúhelníku
9) na kružnici vyberte buď jeden z již sestrojených bodů, anebo zvolte nový bod a od něj nanášejte na kružnici pomocí kružítka délku strany příslušného pravidelného mnohoúhelníku

Příklad 4.4:

Ve VRP zobrazte pravidelný šestiboký jehlan s délkou podstavné hrany rovnou 3 cm a s výškou v = 3,5 cm jehlanu. Šestiúhelníkovou podstavu jehlanu umístěte do roviny kolmé k nákresně.

Příklad 4.5:

Ve VRP zobrazte rotační válec nebo rotační kužel s poloměrem řídicí kružnice r = 2,5 cm a s výškou v = 5,5 cm válce/kužele. Kruhovou podstavu válce/kužele umístěte do roviny kolmé k nákresně.