6. Míra geometrických útvarů

6.1 Úvod

Ne úplně všechno je možné spočítat. Nedokážeme např. přesně určit, kolik vody je v horském jezeře, anebo jaká je vzdálenost mezi mořským pobřežím a hřebenem nedalekých hor. Ale i přesto je užitečné uvedené hodnoty nějakým způsobem popsat a určit. Tyto hodnoty lze např. různými dostupnými způsoby změřit.

Geometrie, která pracuje se vzdálenostmi v reálném světě, plochami a objemy, se stala jednou z nejranějších aplikací matematiky. Slovo geometrie je odvozeno z řeckého **geo** (země) a **metron** (měření).

Některé z vůbec prvních výpočtů se pravděpodobně vztahovaly ke stavbě monumentů, vyměřování půdy, anebo k výrobě artefaktů pro náboženské účely. Prvním nutným krokem bylo stanovení jednotky míry, což byl hlavní rozdíl od počítání např. kusů dobytka.

6.2 Míra geometrických útvarů z pohledu historie

Jakmile lidské komunity začaly vlastnit půdu, obchodovat a stavět složitější stavby, měření se začalo stávat nezbytným. Tj. nejstarší civilizace potřebovaly určit vzdálenosti, plochy, objemy a čas. Matematické pojmy

- úsečka a její délka
- rovinný geometrický obrazec a jeho obsah
- těleso a jeho objem
- úhel a jeho velikost

se tedy postupně vyvinuly z potřeb lidí ve společnosti.

6.2.1 Míry a historie jejich vzniku

Většina nejstarších **délkových měr** od Číny až po předkolumbovskou Ameriku byla založena na odvození od rozměrů částí lidského těla:

a) **loket**
   - jednotka známá už od doby Starého zákona, neboť s ní Noe měřil archu
   - egyptská jednotka délky, která se rovnala vzdálenosti od lokte ke konečkům prstů
   - jednotka, která se dělila na další jednotky, jež měly také vztah k částem lidského těla:

- **1 loket = 28 prstů** (prstem je míněna šířka prstu)
- **4 prsty = 1 dlaň**
- **5 prstů = 1 ruka**
- **12 prstů = 1 malá píď**
- **14 prstů = 1 velká píď**

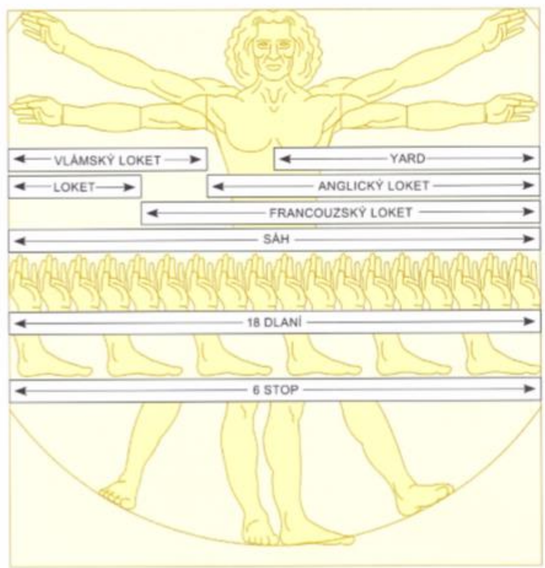
- je zřejmé, že lidská že lidská těla jsou různě tvarovaná a různě velká, proto šířka „ruky“ jednoho člověka může být stejná jako šířka „dlaně“ jiného. Aby se překonaly zřejmé problémy a možné sváry, bylo třeba ustanovit jednotné míry. Tyče s délkou jednoho lokte, které se používaly v Egyptě, byly všechny vyrobeny podle královské normy z černé žuly a měřily 524 mm = 20,62 palců. Egyptská soustava stanovila jednotné míry.

b) **píď** - vzdálenost konce malíčku a palce napjatých prstů dospělého člověka

c) **sáh** - historická antropometrická délková míra odvozená od rozpětí rozpažených rukou dospělého člověka

d) **stopa**

- historická antropometrická délková míra používaná téměř ve všech kulturách
- vznik názvu lze vysvětlit tím, že se jednalo o délku otisku lidské nohy (chodidla), tedy stopy
- Američané a starší generace Britů stále měří krátké vzdálenosti na stopy



Historické jednotky znázorněné na kopii Leonardova Vitruviánského muže.

Stopa rozdělená na 12 palců byla původně římskou délkovou jednotkou, měla přibližně délku dnešních 296 mm. V římské stopě existovaly různé odchylky, které vznikly pravděpodobně záměrně, ale nikdy nebyly důkladně vysvětleny. Římané také používali jako jednotku **dlaň**, která byla čtvrtinou lokte. Větší vzdálenosti měřili Římané na **furlongy** neboli **stadiony** (1 furlong = 1/8 míle), **league** (1 league = 7 500 stop) a **míle** (1 míle = 5 000 stop). Římské jednotky se rozšířily po celé Evropě a o stovky let později po celém světě.

Během dalších století po pádu Římské říše se tyto míry po Evropě dále šířily a rozvíjely, až došlo k jejich velké nejednotnosti. Délka stopy se lišila v každém kraji.

Biskup **John Wilkins** (14. únor 1614, Fawsley – 19. listopad 1672, Londýn) byl anglikánský duchovní, přírodovědec, matematik, teolog a spisovatel. Patřil k zakladatelům britské Královské společnosti v Anglii. K jeho nejznámějším dílům patří spis ***An Essay towards a Real Character and a Philosophical Language*** (1668), v němž navrhl vznik nového univerzálního jazyka, který by užívali jen vědci, a univerzální systém měr a vah. Jím navrhovaná metrická soustava založená na decimálních mírách byla identická s tou, která byla později zavedena ve Francii a jakou dnes používáme. Základní jednotka míry, kterou navrhl, měřila 997 milimetrů – téměř přesný metr. Jeho základní jednotka objemu byla shodná s jedním litrem. Wilkinsonova navrhovaná soustava se však neprosadila. Zůstala nepovšimnuta až do roku 2007, kdy na ni upozornil australský badatel Pat Naughtin.

Vědci po celém světě dnes používají jednotky Mezinárodní soustavy jednotek SI. Jedná se o 7 běžných metrických jednotek: gram, metr, kelvin, ampér, kandela, mol a vteřina. Tato metrická soustava vznikla v 18. století ve Francii.

Už roku 1670 francouzský vikář a matematik **Gabriel Mouton** (1618 – 28 September 1694) poukázal na potřebu jednodušší a sjednocené metrické soustavy, ale trvalo to ještě dalších 120 let, než k tomu došlo.

Roku 1790 Francouzská akademie věd rozhodla, že vědecký tým změří vzdálenost od severního pólu k rovníku na poledníku, který prochází Paříží. První krok znamenal změřit vzdálenost z Dunkerku v severní Francii do Barcelony ve Španělsku. Den poté, co král Ludvík XVI. tuto expedici schválil, byl uvězněn francouzskou revoluční vládou a o pět měsíců později byl sťat gilotinou.

Proto trvalo ještě celý další rok, než se expedice vydala na cestu. A ani po té se jí nevyhnuly potíže. Projekt brzdila válka ve Francii a ve Španělsku, proto členům expedice trvalo celých dalších 6 let, než cestu dokončili. V roce 1799 se podařilo v Paříži metrickou soustavu uzákonit a to se dvěma novými jednotkami – metrem a gramem. Metr byl definován jako „jedna desetimiliόntina délky zemského poledníku od pólu k rovníku“. Hlavním záměrem bylo, aby se soustava stala univerzální a neměnnou.

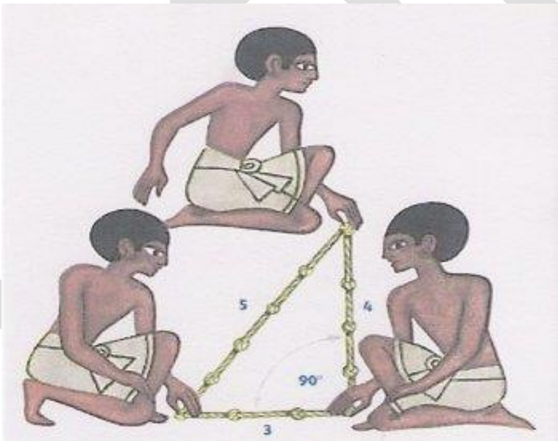
6.2.2 Měření ploch a objemů

Geometrie zajímala lidstvo od pradávna. Nejstarší stavby vybudované s takovou přesností dokazují, že naši předkové museli velmi dobře rozumět základům geometrie. Při stavění se řešily praktické geometrické problémy už dávno předtím, než byly zaznamenány písemně. Sumerové, Babyloňané a Egypťané se brzy stali mistry v práci s dvourozměrnými geometrickými útvary a trojrozměrnými tělesy, v počítání vzdáleností, ploch a objemů.

Dokumenty z období kolem roku 3100 př. n. l. odhalují, že Egypťané a Babyloňané znali matematická pravidla pro výpočty objemů sýpek, vyměřování pozemků a plánování staveb. Velká pyramida v Gíze, která byla postavena kolem roku 2650 př. n. l. dokazuje, jak velké byly znalosti Egypťanů.

Podle řeckého historika Hérodota potřebovali Egypťané umět počítat plochy, protože každoroční nilské záplavy s sebou braly značky, které vytyčovaly pozemky.

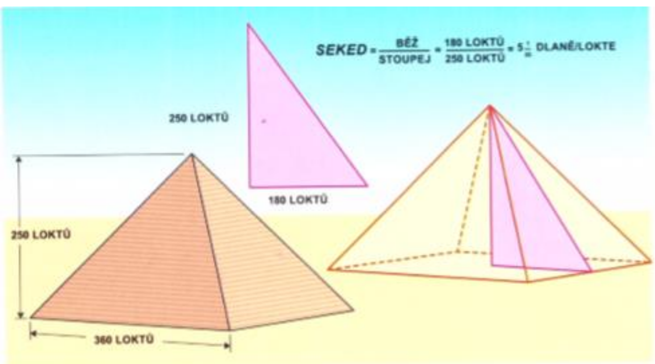
Potřebovali mít tedy nivelační síť a znát vyměřovací techniky, aby mohli pozemky znovu správně vyznačit. Egyptským geometrům se někdy říkalo „napínači lan“, jelikož při vyměřování a označování vzdáleností používali lana. Stejným postupem pravděpodobně také vyměřovali základy staveb.



Zatímco se egyptští a babylonští matematici často zabývali jen konkrétními praktickými situacemi, pozdější civilizace se začaly zajímat více o čistě abstraktní problémy.

6.2.3 Měření úhlů

Trigonometrie je oblastí matematiky, která se zabývá výpočty úhlů především v pravoúhlém trojúhelníku. Na stavbách pyramid je vidět, že Egypťané měli určité znalosti trigonometrie. Na Ahmosově papyru se našla zaznamenaná úloha, v níž se počítá sklon pyramidy z její výšky a základny. Sklon pyramidy je vyjádřen jako poměr opačný k dnešní míře sklonu.



Egypťané nebyli ve studiu trojúhelníků důslední. Stejně jako v dalších odvětvích matematiky, tak i zde se zajímali především o praktické využití než o čistou trigonometrii.

6.2.4 Staročeské míry

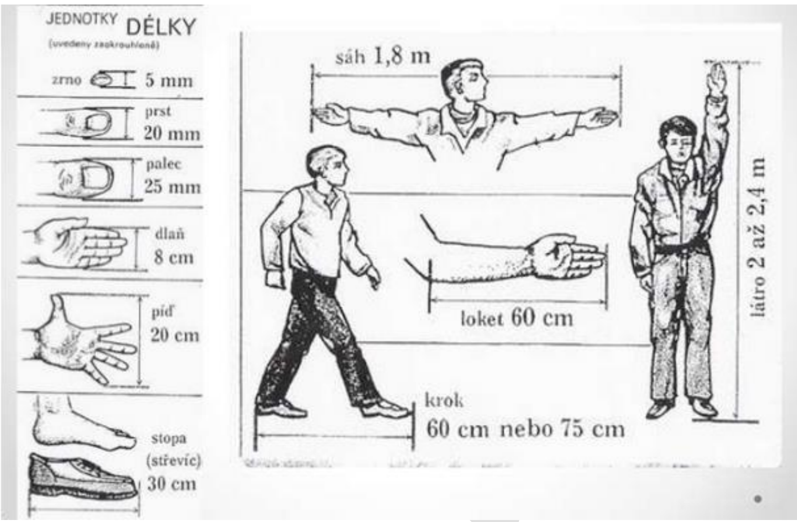
V následujících paragrafech jsou uvedeny staročeské jednotky početní, jednotky délky, jednotky objemu kapalin, které se užívaly v Českých zemích v dřívějších dobách.

6.2.4.1 Staročeské početní jednotky

vrh … 3 ks
tucet … 12 ks
mandel … 15 ks
půlkopa … 30 ks
kopa … 60 ks
veletucet … 144 ks

6.2.4.2 Staročeské jednotky délky

zrnko … 4,92 mm
palec (později coul) … 2,46 cm
pěst … 4 palce … 9,856 cm
píď … 8 palců po 24,64 mm … 19,71 cm
dlaň … 4 prsty … 7,88 cm
střevíc (také **stopa**) … 4 dlaně … 29,6 cm až 31,32 cm
loket český … 59,14 cm – 59,3 cm … 3 pídě po 19,71 cm



Loket český - vzor na věži staré radnice v Litomyšli

Vedle Prahy, Litoměřic a Litomyšle je vzor českého lokte k vidění také v Českých Budějovicích, Kyjově (v ostění vrat radnice), Mělníku (radnice na náměstí Míru), Telči a možná také na jiných místech.

6.2.4.3 Staročeské jednotky objemu tekutin

kapka … 0,005 l
žejdlík … 70 kapek … 0,353 l
holba … 2 žejdlíky … 0,707 5 l
máz … 2 holby … 1,415 l
vědro … 40 mázů … 56,6 l

6.3 Míra a její vlastnosti

6.3.1 Míra a funkční hodnoty míry

V této podkapitole zavedeme pojem míra a také definujeme funkční hodnoty míry na množinách různých geometrických útvarů.

Definice 6.1:

Zobrazení $\boldsymbol{F}$ množiny všech měřitelných útvarů M na množinu nezáporných čísel nazýváme **mírou**, právě když pro funkční hodnoty tohoto zobrazení, které nazýváme velikost geometrického útvaru, platí:

- existuje geometrický útvar s velikostí jedna;
- shodné měřitelné útvary mají sobě rovné velikosti;
- velikost sjednocení dvou nepřekrývajících (nepronikajících) se měřitelných útvarů je rovna součtu velikostí těchto útvarů.

Definice míry zapsaná symbolicky:

Nechť U je měřitelný útvar z množiny všech měřitelných útvarů M a nechť $\boldsymbol{F}(U) \geq 0$ je hodnota míry, pak $\boldsymbol{F}$ je mírou právě tehdy, když:

- $\exists\, U \in M$: $\boldsymbol{F}(U) = 1$;
- $\forall\, U_1, U_2 \in M$: $U_1 \cong U_2 \Rightarrow \boldsymbol{F}(U_1) = \boldsymbol{F}(U_2)$
- $\forall\, U_1, U_2 \in M$: $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow \boldsymbol{F}(U_1 \cup U_2) = \boldsymbol{F}(U_1) + \boldsymbol{F}(U_2)$

Platí: $\forall\, U_1, U_2 \in M$: $U_1 \subset U_2 \Rightarrow \boldsymbol{F}(U_1) \leq \boldsymbol{F}(U_2)$

Definice 6.2:

Funkční hodnota míry na množině všech
- úseček se nazývá **délka úsečky** (d);
- rovinných obrazců se nazývá **obsah obrazce** (S);
- prostorových těles se nazývá **objem tělesa** (V);
- dutých úhlů se nazývá **velikost úhlu** (φ).

6.3.2 Jordanova teorie míry

V této podkapitole představíme obecné principy tzv. Jordanovy teorie míry. V dalším textu budou uvedeny principy Jordanovy teorie míry pro měření délek úseček, obsahu rovinných obrazců, objemů těles a velikostí úhlů.

<u>Jádro</u> (*J*)
- je podmnožinou útvaru
- je sjednocením konečného počtu čtverců sítě
- je maximální množinou s těmito vlastnostmi

<u>Obal</u> (*O*)
- je nadmnožinou útvaru
- je sjednocením konečného počtu čtverců sítě
- je minimální množinou s těmito vlastnostmi

Symbolicky je možné Jordanovu teorii míry zapsat následovně:

$$J \subset U \subset O \Rightarrow S(J) \leq S(U) \leq S(O)$$

6.3.3 Základní míry v geometrii

Základními mírami v geometrii jsou:

- délka (délka úsečky, vzdálenost útvarů, …)
- obvod obrazce (obvod trojúhelníku, čtverce, …)
- velikost úhlu (rovinný úhel a prostorový úhel)
- obsah obrazce (obsah trojúhelníku, čtverce, kruhu, …)
- povrch tělesa
- objem tělesa

6.3.3.1 Délka úsečky

Výsledkem při měření úsečky je zjištění určitého čísla, kterému pak obvykle říkáme délka úsečky. Úsečky měříme v určité míře, tzn. v centimetrech, metrech, kilometrech, palcích, stopách, mílích apod. V jisté míře můžeme určit, že délka dané úsečky jsou třeba 4 centimetry a jiná úsečka v jiné míře bude mít například délku 3,7 metru apod.

Z hlediska matematické teorie si můžeme uvědomit, že při měření úseček jde o to, že každé úsečce přiřazujeme v určité míře právě jedno číslo. Jedná se tedy o ***zobrazení***, přesněji o ***zobrazení množiny všech úseček na množinu jistých čísel***. Pro délky úseček uvažujeme reálná čísla, která nejsou záporná, viz definice míry úsečky.

Definice 6.3:

Míra úseček je zobrazení množiny všech úseček na množinu všech nezáporných reálných čísel a číslo, které je v tomto zobrazení přiřazeno dané úsečce, se nazývá **délka úsečky** (délku úsečky AB zapisujeme $|AB|$).

<u>Postup při měření délky úsečky pomocí tzv. Jordanovy teorie míry:</u>

- zvolíme úsečku délky 1 (1 jednotka délky); např. délka tužky, špejle, klacíku, proužku papíru apod.

- vytvoříme měřítko s touto j. d.
- úsečku *AB,* jejíž délku chceme zjistit, porovnáváme s měřítkem, tj. od jednoho (zpravidla levého) krajního bodu úsečky *AB*, např. od bodu *A,* pokládáme měřítko postupně za sebou tak, aby koncový bod prvního položení měřítka splýval s počátečním bodem druhého položení měřítka atd., až se přiblížíme ke druhému krajnímu bodu úsečky *AB,* tj. k bodu *B*, pak
- pokud druhý krajní bod *B* měřené úsečky *AB*
  a) splyne s koncovým bodem měřidla, potom např.

     $|AB| = 6$ j. d.

  b) nesplyne s koncovým bodem měřidla, tj., je mezi:

     5 j. d. $\leq$ $|AB|$ $\leq$ 6 j. d.

     dolní mez (jádro)   horní mez (obal)

  Pak provedeme zjemnění j. d., např. zvolíme délku půl tužky, a porovnáváme délku měřené úsečky *AB* s polovinou délky tužky, tj. znovu úsečku *AB* měříme pomocí zjemněné jednotky délky.

- pokud druhý krajní bod *B* měřené úsečky *AB*
  A) splyne s bodem měřidla, délka úsečky *AB* je určena;
  B) je mezi krajními body měřidla, znovu zjemníme j .d. a měření s nově zjemněnou jednotkou délky opakujeme až do té doby, dokud nesplyne koncový bod měřidla s druhým krajním bodem *B* měřené úsečky *AB*. Pak je délka úsečky *AB* určena.

Z toho plyne, že posloupnost dolních mezí a posloupnost horních mezí mají společnou limitu a tato limita (= určité reálné číslo) je délkou měřené úsečky.

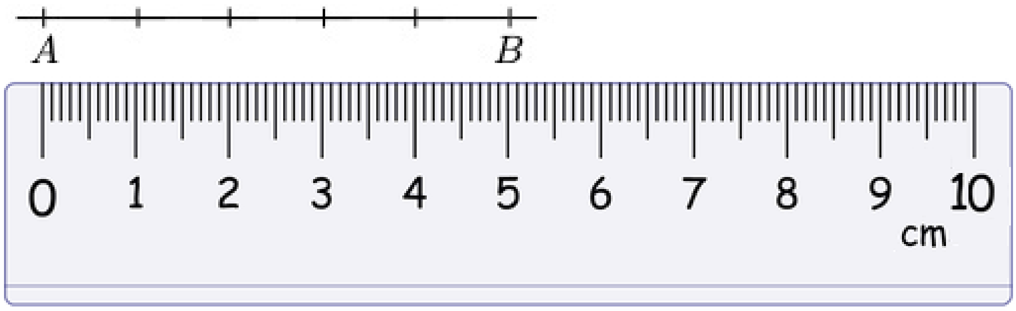
Poznámka: *Ve třídě lze s žáky měřit např. délku lavice pomocí délky tužky, tj. necháme žáky pokládat tužku od jednoho okraje lavice postupně za sebou tak, aby koncový bod prvního položení tužky splýval s počátečním bodem druhého položení tužky atd., až se přiblíží k druhému okraji lavice*.

Výše uvedený postup popisuje hlavní principy tzv. **Jordanovy teorie míry** pro měření délek úseček.

<u>Postup při měření délky úsečky v praxi s užitím měřidla:</u>

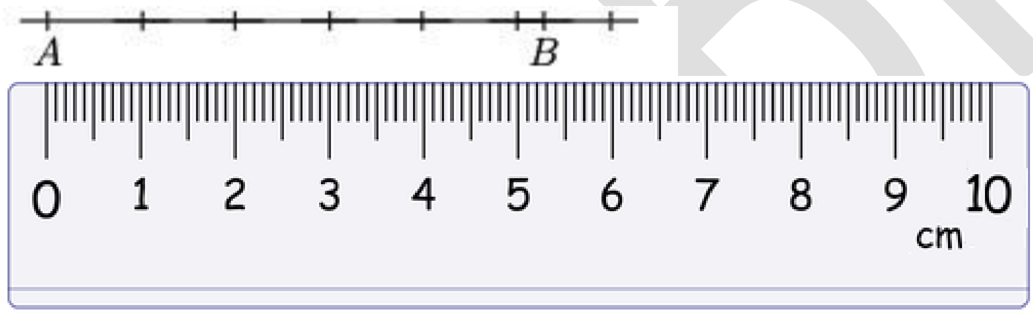
Při měření úsečky v praxi postupujeme zpravidla tak, že k měřené úsečce nanášíme postupně od jednoho jejího krajního bodu úsečku jednotkovou.

Může se stát, že měřená úsečka je celočíselným násobkem jednotkové úsečky. Na obr. je délka úsečky $|AB|$ = 5 cm při uvažované jednotkové úsečce o délce 1 cm.



Není-li měřená úsečka celočíselným násobkem úsečky jednotkové, můžeme její délku vyjádřit buď přibližně, nebo postupovat dále tak, abychom její délku určili přesně nebo alespoň přesněji.

Označme délku úsečky AB symbolickým označením $|AB|$. Pak pro úsečku AB na obr. platí: 5 cm < $|AB|$ < 6 cm. Délka 5 cm se nazývá **dolní mez**, délka 6 cm se nazývá **horní mez** délky úsečky AB. Délku úsečky AB na obr. můžeme po zaokrouhlení vyjádřit přibližně takto $|AB| \doteq$ 5 cm.



<u>Jednotky:</u>

Protože volené jednotky mohou být různé, je třeba jednotku sjednotit:

- <u>Základní jednotka délky</u>
  - 1 metr (1 m)
- <u>Odvozené jednotky</u>
  - pomocí předpon mili-, centi-, deci-, (deka-), hekto-, kilo- apod.
  - převodní vztah mezi sousedními jednotkami je 10:

    1 km = 10 hm = 1 000 m = 10 000 dm = 100 000 cm = 1 000 000 mm

Zopakování historických poznámek: Metr jako základní jednotka délky, jehož standardní značka je m, byl zaveden na konci 18. století ve Francii a jeho délka je odvozena od jedné desetimilióntiny délky poledníku od pólu k rovníku. Na metru byla současně založena metrická soustava fyzikálních veličin.

Hektometr (značka **hm**)

- je délková jednotka, o hodnotě 10^2 metrů neboli 100 metrů
- Hektometr se prakticky nepoužívá. Jen na železnici je zaveden jako vzdálenost dvou sousedních hektometrovníků.
  - **Hektometrovníky** jsou kamenné (betonové) patníky rozmístěné podél železničních tratí a čísla na nich vyznačená informují o poloze místa na trati, jinými slovy určují vzdálenost od začátku trati.
  - Sama poloha bodu na trati se ale udává v kilometrech s přesností na tisíciny (skutečně tedy na metry). Kilometrovníky jsou od sebe vzdáleny, jak už jejich název napovídá, jeden kilometr a mezi nimi je po sto metrech umístěno devět kamenů, kterým se říká hektometrovníky. Ale pozor – to platí jen pro místní (lokální) tratě. Na hlavních tratích jsou hektometrovníky umístěny střídavě po obou stranách, na levé od začátku trati k jejímu konci s lichými desetinami kilometru, na pravé se sudými desetinami kilometru.

Definice 6.4:

Vzdálenost geometrických útvarů U_1, U_2 je velikost nejmenší ze všech úseček X_1X_2 , kde X_1 je bodem útvaru U_1 a X_2 je bodem útvaru U_2.

6.3.3.2 Obsah obrazce

Výsledkem při výpočtu obsahu rovinného obrazce je zjištění určitého čísla, které odpovídá velikosti roviny, jenž daný rovinný obrazec zabírá. Tomuto číslu obvykle říkáme obsah rovinného obrazce. Obsahy rovinných obrazců určujeme v určité míře, tzn. v centimetrech čtverečních, metrech čtverečních, kilometrech čtverečních apod. V jisté míře můžeme určit, že obsah daného rovinného útvaru jsou např. 4 cm^2 a obsah dalšího rovinného útvaru v jiné míře bude mít např. hodnotu 5,2 m^2 apod.

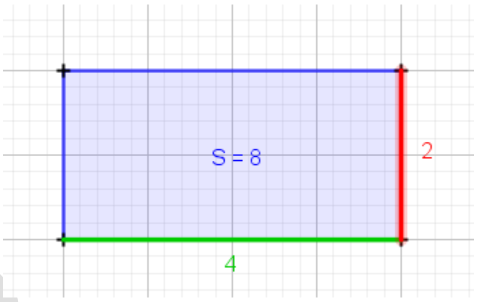
Z hlediska matematické teorie si můžeme uvědomit, že při měření rovinných obrazců jde o to, že každému rovinnému obrazci přiřazujeme v určité míře právě jedno číslo. Jedná se tedy o ***zobrazení***, přesněji o ***zobrazení množiny všech rovinných obrazců na množinu jistých čísel***. Pro obsahy rovinných obrazců uvažujeme reálná čísla, která nejsou záporná, viz definice míry obsahu rovinných obrazců.

Definice 6.5:

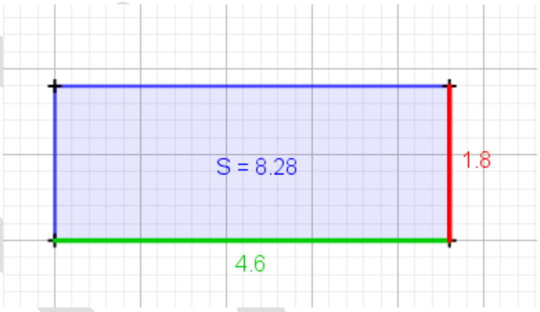
Míra obsahu rovinných obrazců je zobrazení množiny všech rovinných obrazců na množinu všech nezáporných reálných čísel a číslo, které je v tomto zobrazení přiřazeno danému rovinnému obrazci, se nazývá **obsah rovinného obrazce** (obsah obrazce značíme S).

Postup při měření obsahu rovinných obrazců pomocí tzv. Jordanovy teorie míry:

- zvolíme čtvereček o velikosti obsahu 1 (1 jednotka obsahu)
- vytvoříme měřítko s touto j. obs., např. čtvercovou síť
- měřený obrazec (např. obdélník) porovnáváme s měřítkem (se sítí), pak pokud
  a) strany sítě splynou se stranami obdélníku:
  $S_{\text{obdélníku}} = 8$ j. obs.



  b) strany sítě nesplynou se stranami obdélníku, tj., jsou mezi:
  6 j. obs. $\leq S_{\text{obdélníku}} \leq$ 12 j. obs.
  dolní mez (jádro) — horní mez (obal)
  pak provedeme zjemnění j. obs. (tj. zvolíme menší čtvercovou síť, např. poloviční) a měření opakujeme se zjemněnou sítí.



- Pak pokud nastane případ, že
  A) strany zjemněné sítě splynou se stranami obdélníku, je velikost obsahu obrazce určena;
  B) strany zjemněné sítě opět nesplynou se stranami obdélníku, tj., strany obdélníku jsou mezi stranami zjemněné sítě, pak znovu zjemníme j. obs. (tj. zvolíme ještě jemnější čtvercovou síť, např. čtvrtinovou) a měření opakujeme do té doby, dokud strany zjemňované čtvercové sítě nesplynou se stranami obdélníku, pak je velikost obsahu obrazce určena.

Výše uvedený postup popisuje hlavní principy tzv. **Jordanovy teorie míry** pro měření obsahu rovinného útvaru.

Jednotky:

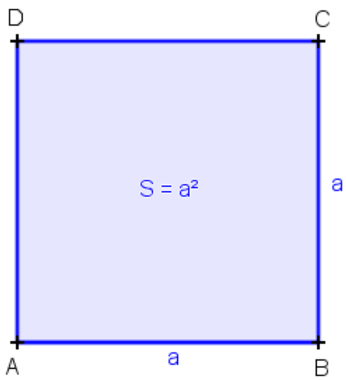
- Základní jednotka obsahu
  - 1 metr čtvereční (1 m^2)
- Odvozené jednotky:
  - pomocí předpon mili-, centi-, deci-, (deka-), hekto-, kilo- apod.
  - převodní vztah mezi sousedními jednotkami je 100:
  $1\ km^2 = 1\ 000\ 000\ m^2$
  $1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10\ 000\ cm^2 = 1\ 000\ 000\ mm^2$
- Vedlejší jednotky: hektar, ar
  $1\ ha = 100\ a = 10\ 000\ m^2$

Výpočet obsahu rovinných obrazců pomocí vzorců

- využití shodné rozložitelnosti rovinných útvarů při výpočtu jejich obsahů

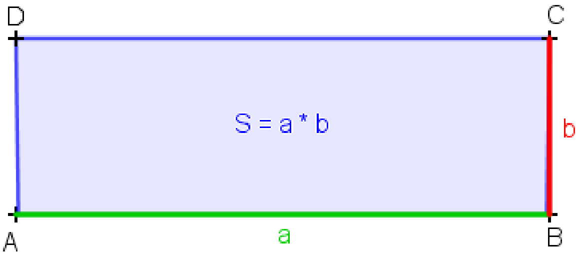
1. Čtverec

- $S = a \cdot a = a^2$, kde *a* je délka strany čtverce



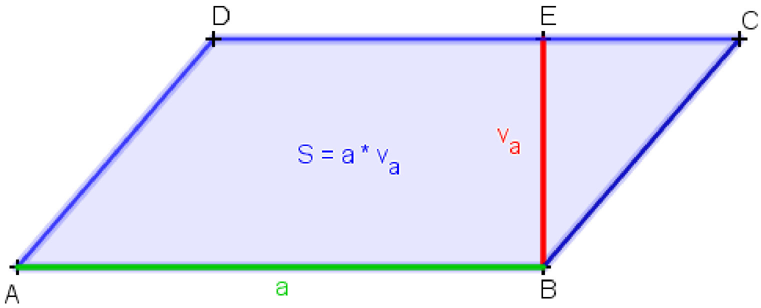
2. Obdélník

- $S_{obdélníku} = a \cdot b$, kde *a, b* jsou délky stran obdélníku



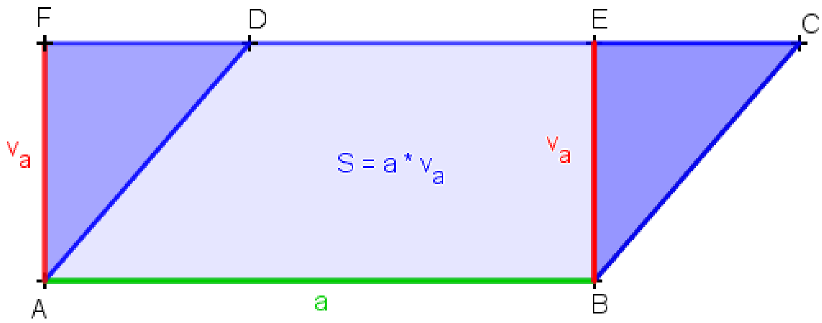
3. Rovnoběžník

- $S_{rovnoběžníku} = a \cdot v_a$, kde *a* je délka strany rovnoběžníku a v_a je výška na stranu *a*



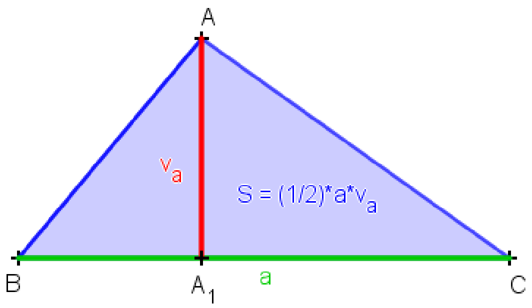
Využijeme shodné rozložitelnosti a rovnoběžník *ABCD* přeměníme na obdélník *ABEF* na základě shodnosti trojúhelníků $\triangle BCE \cong \triangle ADF$ (podle věty *usu*), potom platí, že

$S_{rovnoběžníku} = S_{obdélníku} = a \cdot v_a$



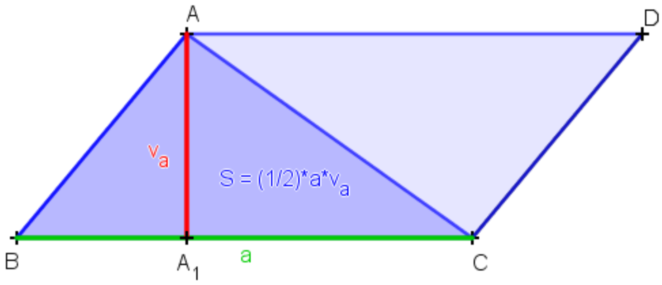
4. Trojúhelník

- $\boldsymbol{S_\triangle = ½ \cdot a \cdot v_a}$, kde a je délka strany trojúhelníku a v_a je výška na stranu a



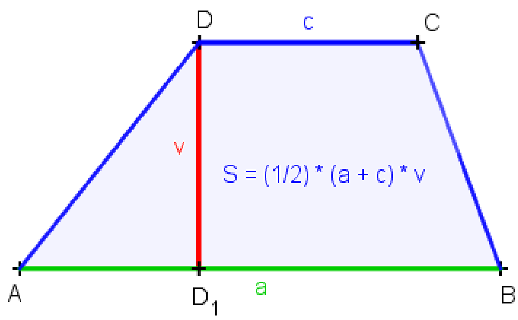
Využijeme shodné rozložitelnosti a trojúhelník *ABC* přeměníme na rovnoběžník na základě shodnosti trojúhelníků $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (podle věty *usu*), potom platí, že

$S_\triangle = ½ \cdot S_{rovnoběžníku} = ½ \cdot a \cdot v_a$



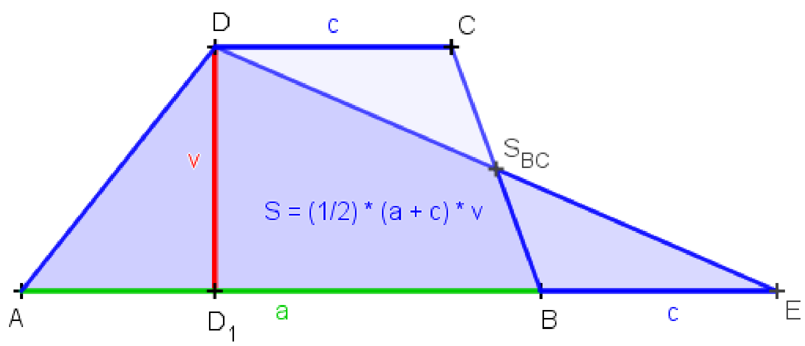
5. Lichoběžník

- $\boldsymbol{S_{lichoběžníku} = ½ \cdot (a + c) \cdot v}$, kde a, c jsou délky základen lichoběžníku a v je výška lichoběžníku na základnu a



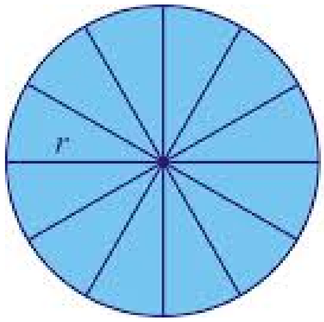
Využijeme shodné rozložitelnosti a lichoběžník *ABCD* přeměníme na trojúhelník *ABE* na základě shodnosti trojúhelníků $\triangle BES_{BC} \cong \triangle CDS_{BC}$ (podle věty *usu*), potom platí, že

$S_{lichoběžníku} = S_\triangle = ½ \cdot (a + c) \cdot v$



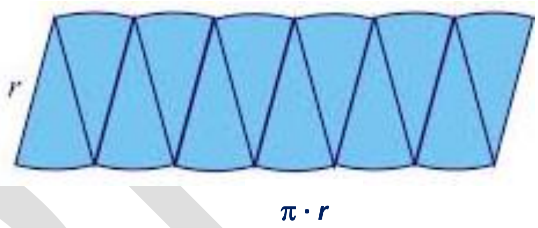
6. **Kruh**

- $\boldsymbol{S_{\bigcirc} = \pi \cdot r^2}$, kde r je poloměr kruhu



Využijeme shodné rozložitelnosti a kruh přeměníme na „vlnitý" rovnoběžník, potom platí, že

$S_{\bigcirc} = S_{rovnoběžníku} = \pi \cdot r \cdot r$



6.3.3.3 Objem tělesa

Výsledkem při výpočtu objemu geometrického tělesa je zjištění určitého čísla, které odpovídá velikosti trojrozměrného prostoru, jenž dané geometrické těleso zabírá. Tomuto číslu obvykle říkáme objem tělesa. Objemy těles určujeme v určité míře, tzn. v centimetrech krychlových, decimetrech krychlových, metrech krychlových apod. V jisté míře můžeme určit, že objem daného tělesa jsou např. 4 cm^3 a objem dalšího tělesa v jiné míře bude mít např. hodnotu 5,2 m^3 apod.

Z hlediska matematické teorie si můžeme uvědomit, že při měření těles jde o to, že každému geometrickému tělesu přiřazujeme v určité míře právě jedno číslo. Jedná se tedy o ***zobrazení***, přesněji o ***zobrazení množiny všech geometrických těles na množinu jistých čísel***. Pro objemy geometrických těles uvažujeme reálná čísla, která nejsou záporná, viz definice míry objemu geometrických těles.

Definice 6.6:

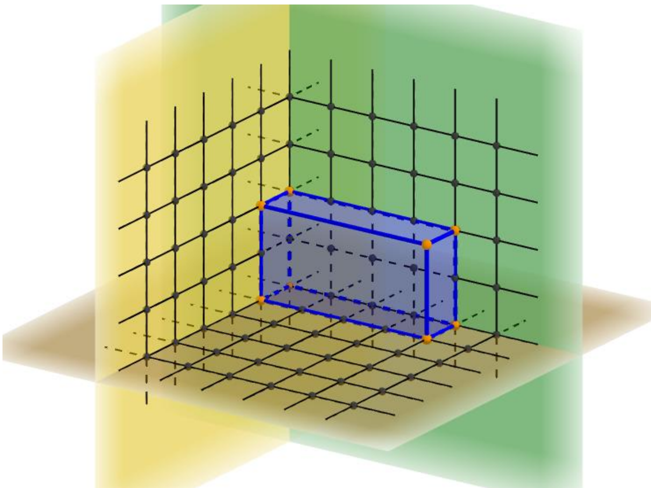
Míra objemu geometrických těles je zobrazení množiny všech geometrických těles na množinu všech nezáporných reálných čísel a číslo, které je v tomto zobrazení přiřazeno danému geometrickému tělesu, se nazývá **objem geometrického tělesa** (objem tělesa označujeme písmenem V).

<u>Postup při měření objemu geometrických těles pomocí tzv. Jordanovy teorie míry:</u>

- zvolíme krychli o velikosti objemu 1 (1 jednotka objemu)
- vytvoříme měřítko s touto j. obj., např. krychlovou síť
- měřené těleso (např. kvádr) porovnáváme s měřítkem (tj. s krychlovou sítí), pak pokud

a) hrany sítě splynou s hranami kvádru:

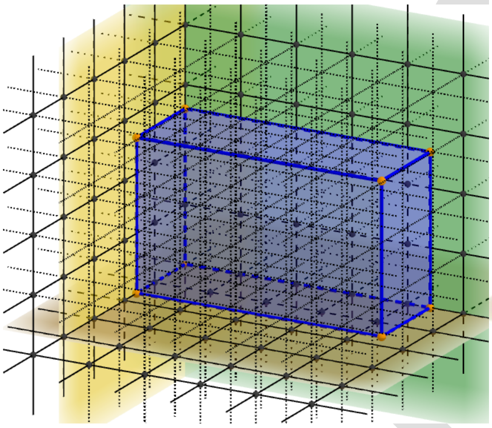
$V_{\text{kvádru}} = 8$ j .obj.

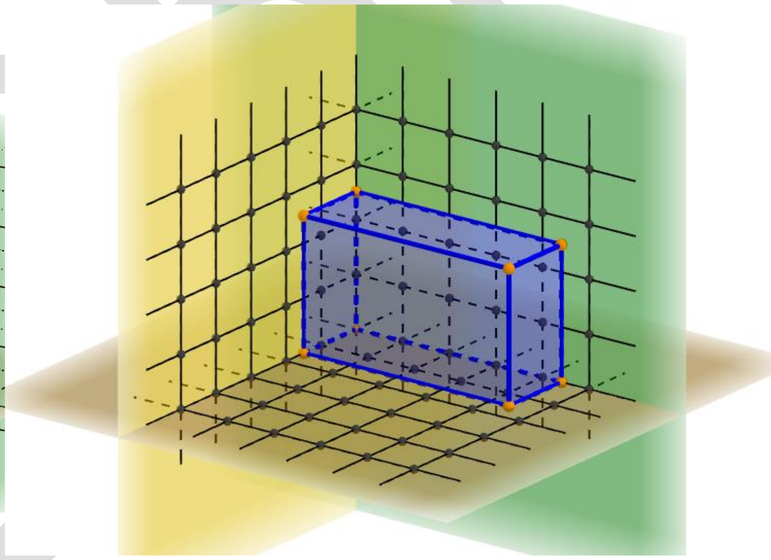


b)hrany sítě nesplynou s hranami kvádru, tj., jsou mezi:

8 j. obj. ≤ $V_{\text{kvádru}}$ ≤ 30 j. obj.

dolní mez (jádro) horní mez (obal)





pak provedeme zjemnění j. obj. (tj. zvolíme menší krychlovou síť, např. poloviční) a měření opakujeme se zjemněnou krychlovou sítí. Pak pokud nastane případ, že

A) hrany zjemněné sítě splynou s hranami kvádru, je velikost objemu kvádru určena;
B) hrany zjemněné sítě opět nesplynou s hranami kvádru, tj., hrany kvádru jsou mezi hranami zjemněné sítě, pak znovu zjemníme j. obs. (tj. zvolíme ještě jemnější krychlovou síť, např. čtvrtinovou) a měření opakujeme až do té doby, dokud hrany zjemňované krychlové sítě nesplynou s hranami kvádru, pak je velikost objemu kvádru určena.

Výše uvedený postup popisuje hlavní principy tzv. **Jordanovy teorie míry** pro měření objemu kolmého hranolu.

Jednotky:

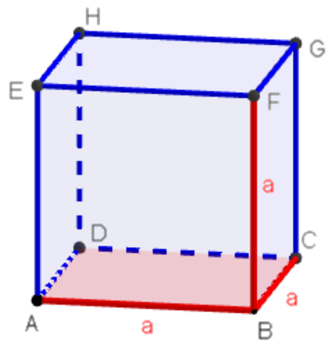
- Základní jednotka objemu
  - 1 metr krychlový (1 m^3)
- Odvozené jednotky
  - pomocí předpon mili-, centi-, deci-, deka-, hekto-, kilo- apod.
  - převodní vztah mezi sousedními jednotkami je 1000.

  1 m^3 = 1 000 dm^3 = 1 000 000 cm^3 = 1 000 000 000 mm^3
- Vedlejší jednotky
  - duté míry: 1 l = 1 dm^3, 1 ml = 1 cm^3
  - odvozené jednotky pomocí předpon mili-, centi-, deci-, deka-, hekto-, kilo- apod., přičemž převodní vztah mezi jednotkami je 10

Výpočet objemu základních těles pomocí vzorců

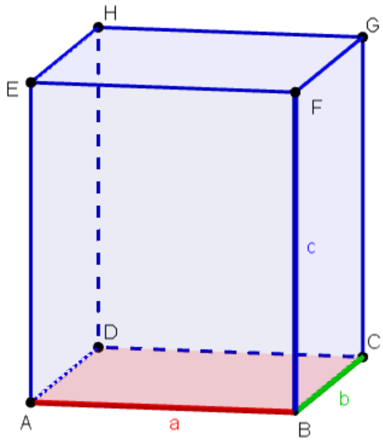
1. Krychle

- $\boldsymbol{V = a^3}$, kde a je délka hrany krychle



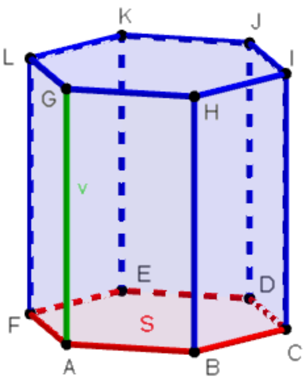
2. Kvádr

- $\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$, kde a, b, c jsou délky hran kvádru



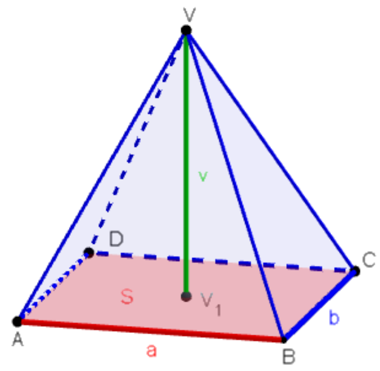
3. Hranol

- $\boldsymbol{V = S \cdot v}$, kde S je obsah podstavy a v je výška hranolu



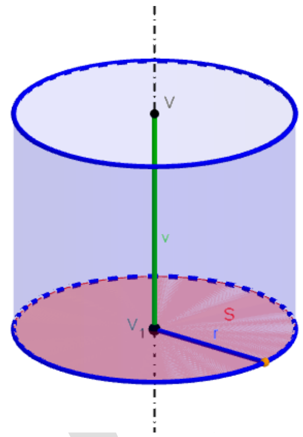
4. Jehlan

- $\boldsymbol{V = (1/3) \cdot S \cdot v}$, kde *S* je obsah podstavy a *v* je výška jehlanu



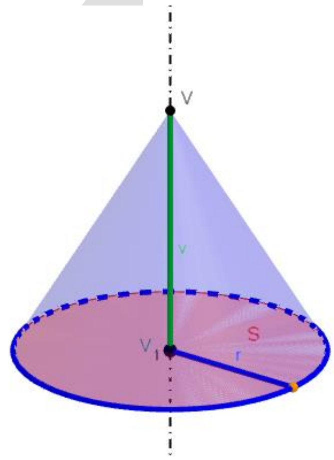
5. Válec

- $\boldsymbol{V = S \cdot v = \pi r^2 \cdot v}$, kde *S* je obsah podstavného kruhu a *v* je výška válce



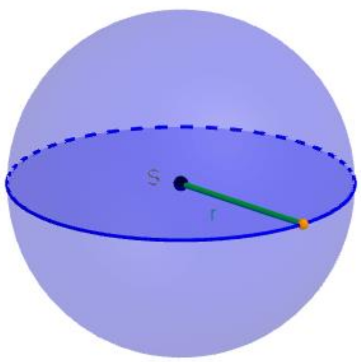
6. Kužel

- $\boldsymbol{V = (1/3) \cdot S \cdot v = (1/3) \cdot \pi r^2 \cdot v}$, kde *S* je obsah podstavného kruhu, *r* je poloměr podstavného kruhu a *v* je výška kužele



7. Koule

- $\boldsymbol{V = (4/3) \cdot \pi r^3}$, kde *r* je poloměr koule



6.3.3.4 Velikost úhlu

<u>**Úhel**</u>

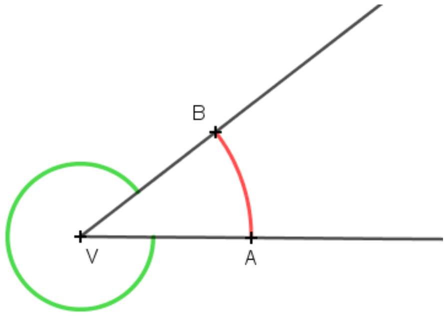
Pojem úhlu patří k nejzákladnějším pojmům geometrie. Zajímavé je, že úhel můžeme definovat několika různými způsoby, z nichž každý má své opodstatnění.

Definice 6.7:

Úhel je část roviny omezená dvěma polopřímkami se společným počátkem.

Při takto definovaném úhlu je nutné si uvědomit, že polopřímky *VA* a *VB* vymezují v rovině dva různé úhly a to:

- **konvexní úhel *AVB*** s označením ∢*AVB*
- **nekonvexní úhel *AVB*** s označením ∢*AVB*.



Termonologie:

- bod *V* se nazývá **vrchol úhlu** *AVB*,
- polopřímky *VA* a *VB* se nazývají **ramena úhlu** *AVB*

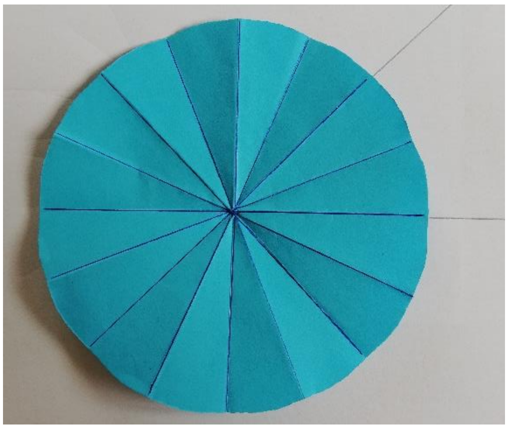
<u>**Velikost úhlu**</u>

- Velikost úhlu se považuje za veličinu, tudíž se k velikosti úhlu připojuje značka úhlové jednotky.

<u>**Postup při měření velikosti úhlu pomocí tzv. Jordanovy teorie míry:**</u>

- zvolíme úhel jednotkové velikosti (1 úhlová jednotka)
- vytvoříme měřítko s touto ú. j., např. úhlový vějíř

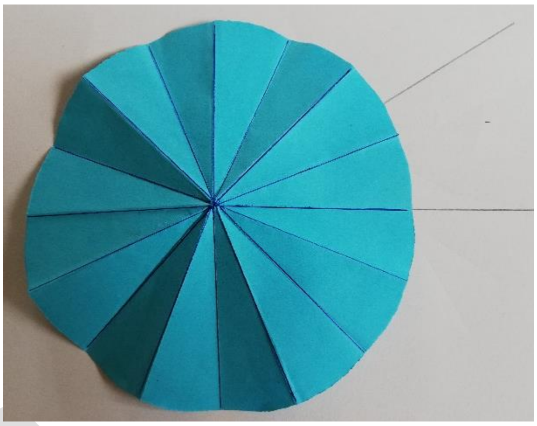
- měřený úhel porovnáváme s měřítkem (např. s vějířem), pak pokud
  a) hrany vějíře splynou s rameny úhlu:
  $\varphi = 2$ ú. j.



b) hrany vějíře nesplynou s rameny úhlu, tj., jsou mezi:

1 ú. j. $\leq \varphi \leq$ 2 ú. j.

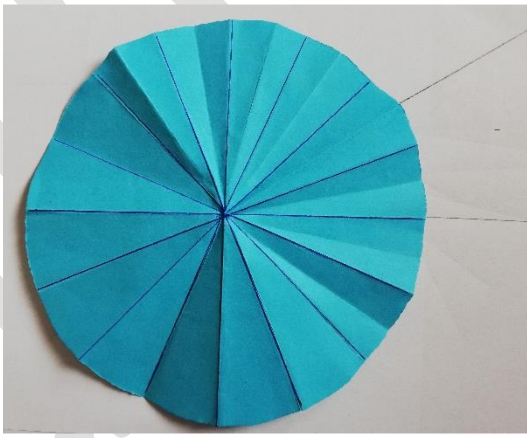
dolní mez (jádro) horní mez (obal)



pak provedeme zjemnění úhlové jednotky (zjemnění vějíře) a měření opakujeme se zjemněnou úhlovou jednotkou. Potom pokud nastane případ, že

A) hrany zjemněné úhlové jednotky, tj. vějíře, splynou s rameny úhlu, je velikost úhlu určena; tj.

φ = 1,5 ú. j.



B) hrany zjemněné úhlové jednotky, tj. vějíře, opět nesplynou s rameny úhlu, tj., ramena úhlu jsou mezi hranami zjemněné sítě, pak znovu zjemníme úhlovou jednotku (tj. zvolíme ještě jemnější dělení vějíře, např. čtvrtinové) a měření opakujeme až do té doby, dokud hrany zjemňovaného vějíře nesplynou s rameny úhlu, pak je velikost úhlu určena.

Jednotky:

Úhly se zpravidla měří v obloukové nebo stupňové míře.

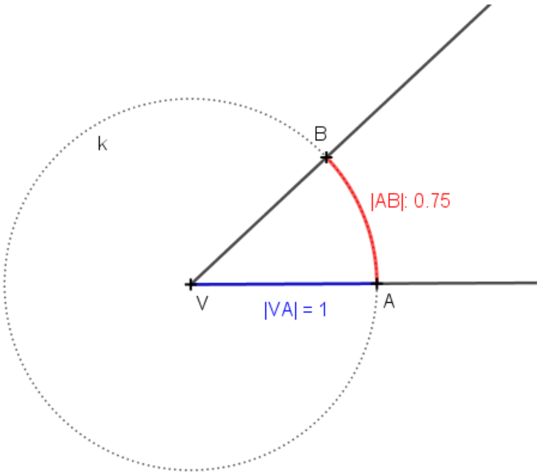
a) Oblouková míra

Základní jednotka velikosti úhlu v obloukové míře:

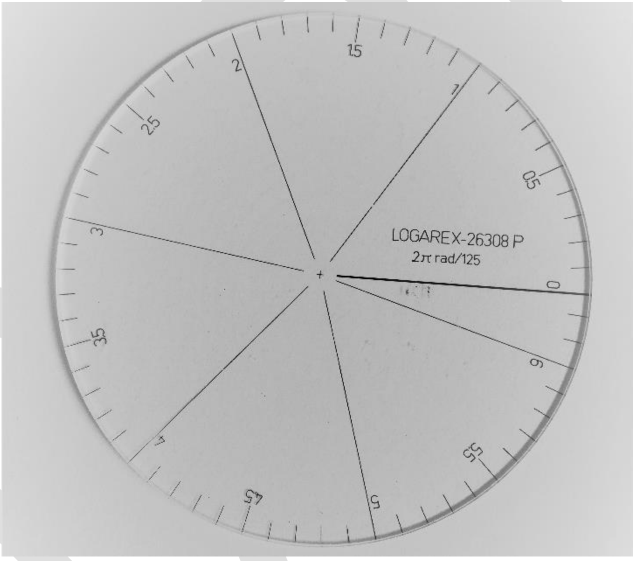
- úhlová jednotka obloukové míry se nazývá **radián** a označuje se **rad**
  - 1 radián (1 rad)
- úhel, kde délka oblouku = hodnotě obloukové míry úhlu

- tj. hodnota obloukové míry úhlu *AVB* se rovná délce kruhového oblouku *AB*, který je průnikem úhlu *AVB* a kružnice *k* se středem ve vrcholu *V* úhlu a s poloměrem rovným jedné.
- délka oblouku *AB* je rovna 0,75

  ⇒ velikost konvexního úhlu *AVB* je rovna 0,75 rad, tj. symbolicky zapsáno: $|\sphericalangle AVB| = 0{,}75$ rad



K měření úhlů v obloukové míře slouží speciální úhloměr



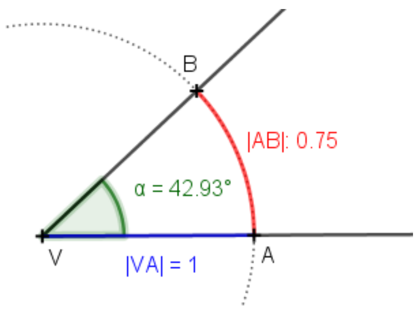
b) Stupňová míra

- úhlová míra stupňová byla odvozena od rozměru pravého úhlu, kterému bylo přiřazeno 90 jednotek, proto tuto míru nazýváme též **devadesátinná míra**

__Základní jednotka velikosti úhlu ve stupňové míře:__

- **úhlovou jednotkou stupňové míry je 1 stupeň, značka °**

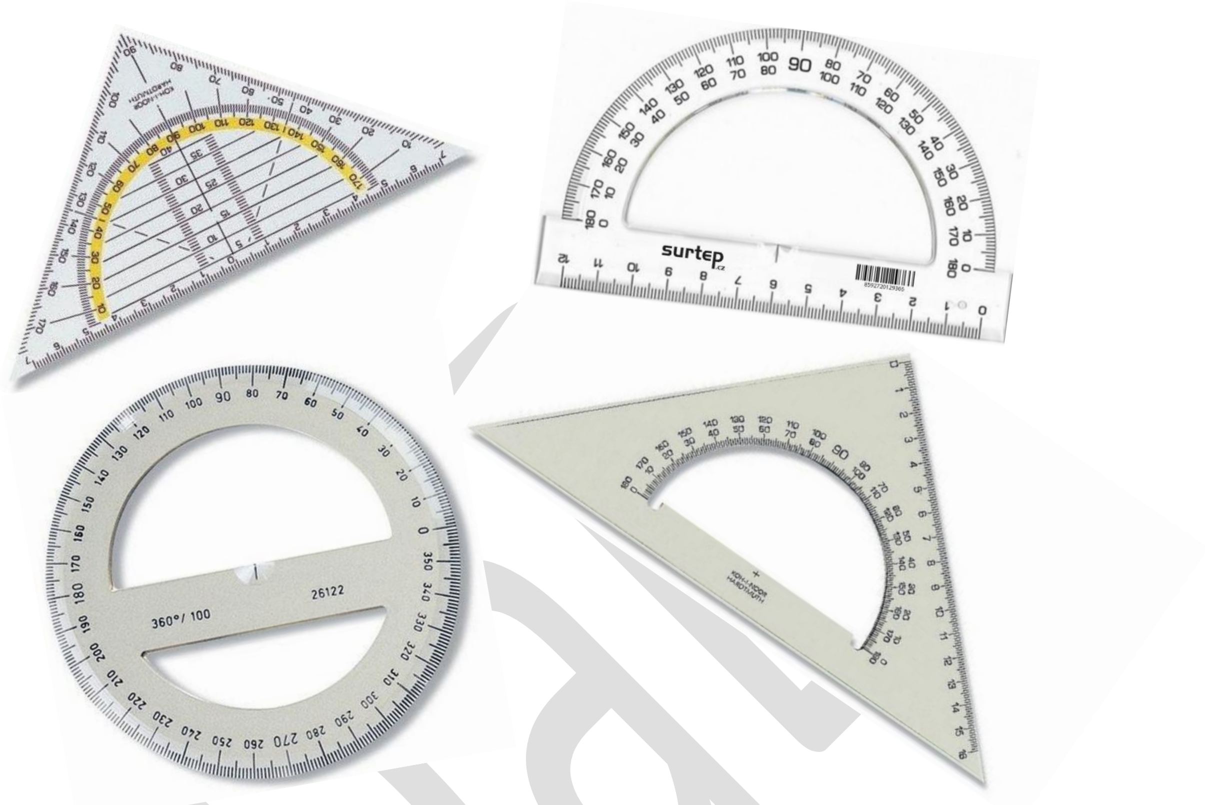
- 1 úhlový stupeň můžeme vyjádřit v závislosti na
  - hodnotě pravého úhlu: 1° = 1/90 pravého úhlu
  - úhlové jednotce obloukové míry: $1° = \frac{\pi}{180}$ rad



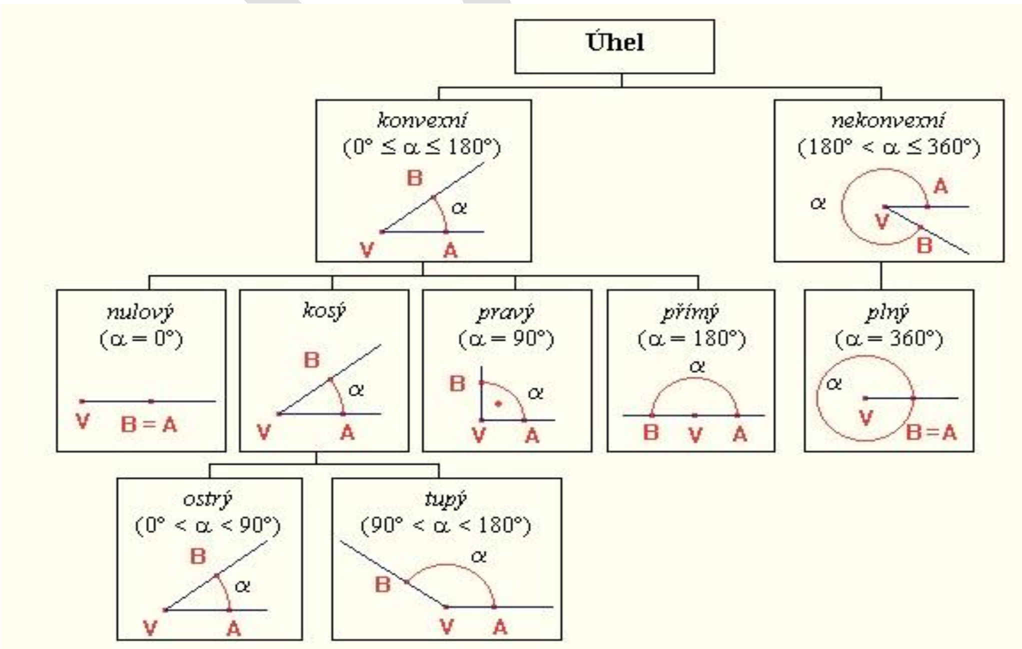
Odvozené jednotky

- Úhlový stupeň se dělí na 60 úhlových minut ($1^\circ = 60'$ nebo $1' = 1/60$ úhlového stupně)
- Úhlová minuta se dělí na 60 úhlových vteřin ($1' = 60''$ nebo $1'' = 1/60$ úhlové minuty), tj. $1^\circ = 3\,600''$
- převodní vztah mezi sousedními jednotkami je 60

K měření úhlů v obloukové míře slouží stupňové úhloměry, na trhu jich je několik druhů



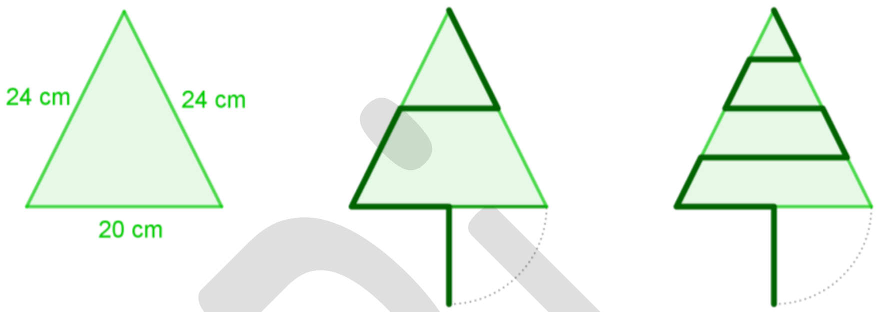
Rozdělení úhlů podle jejich velikosti



6.4 Úlohy k procvičování

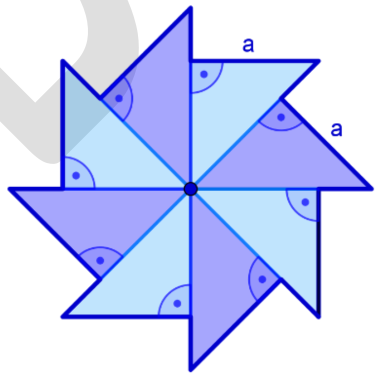
6.4.1 Délka úsečky

<u>Úloha 6.1:</u>
Drátěné stromečky byly vytvořeny podle šablony tvaru rovnoramenného trojúhelníku. Všechny části téhož stromečku ležící na ramenech daného rovnoramenného trojúhelníku mají stejnou délku.
Určete v cm délku drátu, ze kterého byl vytvořen
a) stromeček A,
b) stromeček B.



6.4.2 Obvod obrazce

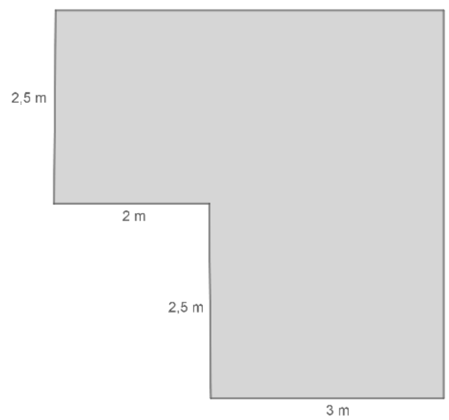
<u>Úloha 6.2:</u>
Papírový větrník na obrázku se skládá z osmi pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků. Délky ramen *a* těchto osmi pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků jsou rovny 10 cm. Vypočtěte v cm obvod daného papírového větrníku.



6.4.3 Obsah rovinného útvaru

<u>Úloha 6.3:</u>
Berglovi se chystají renovovat kuchyň. Chtějí v ní také pokládat novou podlahu. Půdorys podlahy kuchyně je zakreslen na obrázku. Berglovi se rozhodli k pokládce čtvercových dlaždic s délkami stran 25 cm. Pomozte Berglovým určit,

a) jak velkou plochu podlahy mají ve své kuchyni;
b) kolik čtvercových dlaždic budou k pokládce kuchyně potřebovat (přitom uvažujte, že budou dlaždice pokládat pouze na plochu podlahy, tj. užití dlaždit na sokly neuvažujte).



6.4.4 Povrch tělesa

Úloha 6.4:

Dětský látkový tunel na prolézání „housenka“ má průměr 50 cm a délku 1,86 m. Tunel je vyztužen 7 drátěnými obručemi, přitom dvě z nich jsou na krajích tunelu. Každé dvě sousední obruče mají mezi sebou stejnou vzdálenost.

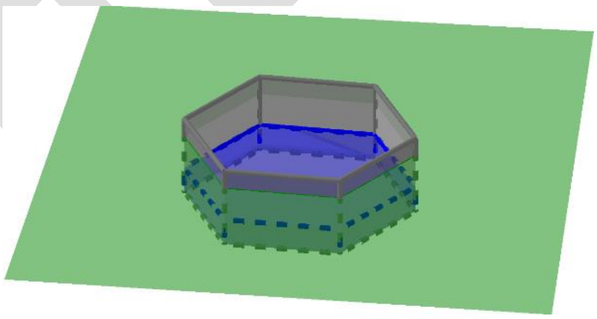
a) Určete v decimetrech vzdálenost mezi sousedními obručemi. Tloušťku drátu zanedbejte.
b) Určete v metrech celkovou délku drátu, ze kterého jsou obruče vyrobeny. Výsledek zaokrouhlete na celé metry; přidání drátu na zahnutí, resp. spojení apod. neuvažujte.
c) Vypočtěte v decimetrech čtverečních, kolik zelené látky je potřeba na ušití tunelu a odepínacího kruhu v podobě hlavy stonožky, pokud na švy odepínacího kruhu i tunelu přidáme 5 % látky. Průměr odepínacího kruhu je roven 55 cm. Výsledek zaokrouhlete na celé decimetry čtvereční.

6.4.5 Objem tělesa

Úloha 6.5:

Zahradníci vytvořili v parku okrasné jezírko ve tvaru kolmého pravidelného šestibokého hranolu. Obsah dna jezírka je 12 m^2 a hloubka jezírka je 1,5 m. Aby se zahradníkům do jezírka lépe umísťovaly vodní květiny, naplnili nejprve jezírko do jedné třetiny jeho celkové výšky.

a) Vypočtěte, do jaké výšky dosahovala výška vody v jezírku při jeho prvotním naplnění za účelem umístění vodních květin.
b) Určete v litrech, jaké množství vody musí zahradníci do jezírka ještě dopustit, aby bylo jezírko naplněno do čtyř pětin jeho výšky a mohly být do něj vpuštěny okrasné rybičky.



6.4.6 Velikost úhlu

Úloha 6.6:

V rovině je dán trojúhelník *ABC*. Vrcholy *B, C* trojúhelníku *ABC* jsou krajními body polokružnice *k* se středem S_{BC} úsečky *BC*. Polokružnice *k* prochází bodem *A*. Velikost ostrého úhlu CAS_{BC} je rovna 65°.
Určete hodnotu součtu velikostí úhlů γ a δ.