1. GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

1.1 Zobrazení

Definice 1.1.1:

Binární relace, v níž prvku z prvního oboru relace patří nejvýše jeden prvek z druhého oboru relace, se nazývá **zobrazení**.

- Jsou-li prvky oborů množiny bodů, nazývá se zobrazení **geometrické**.
- Zobrazení bodových množin na sebe, zejména pokud jsou prostá, se nazývají **transformace**.

Definice 1.1.2:

Geometrické zobrazení v rovině ρ je **zobrazení** množiny bodů roviny ρ **do** množiny bodů roviny ρ právě tehdy, když každému bodu $X \in \rho$ je přiřazen právě jeden bod $X' \in \rho$. Bod X je vzor, bod X' obraz bodu X v tomto zobrazení.

Definice 1.1.3:

Je-li každý bod X' roviny ρ obrazem alespoň jednoho bodu X roviny ρ, pak se jedná o **zobrazení** roviny ρ **na** rovinu ρ.

Definice 1.1.4:

Prostá zobrazení jsou zobrazení, v nichž jsou každým dvěma různým vzorům přiřazeny dva různé obrazy (můžeme hovořit o tzv. vzájemně jednoznačných zobrazeních).

Definice 1.1.5:

Bod *A* nazýváme **samodružný bod** zobrazení *Z*, jestliže platí *Z*(*A*) = *A*´ = *A*.

Čteme: V zobrazení *Z* je obrazem bodu *A* bod *A*´, nebo vzorem bodu *A*´ je bod *A.*

Definice 1.1.6:

Obraz *U*´ geometrického útvaru *U* je množina obrazů všech bodů útvaru *U.*

Definice 1.1.7:

Je-li obrazem geometrického útvaru *U* útvar *U*´, který s útvarem *U* splývá, nazývá se útvar *U* **samodružným útvarem** příslušného zobrazení.

Poznámka: Samodružný útvar nemusí být v daném zobrazení útvarem samodružných bodů.

Definice 1.1.8:

Zobrazení, ve kterém je každý bod samodružný, se nazývá **identita**.

Definice 1.1.9:

Vztahy, které se při daném zobrazení nemění (např. velikosti úseček, velikosti úhlů, smysl obíhání vrcholů trojúhelníku apod.) se nazývají **invariantní** (tj. neměnné); zkráceně **invarianty**.

Poznámka: **Složením zobrazení** Z_1 a Z_2 (značíme $Z_1 \circ Z_2$) rozumíme zobrazení Z dané předpisem: $Z = Z_1 \circ Z_{2}$.

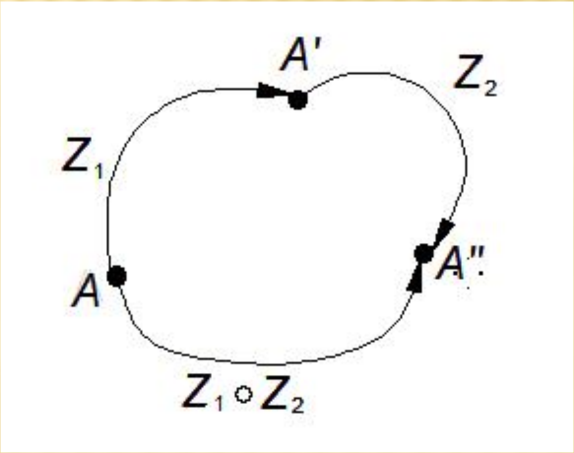
Definice 1.1.10:

Jsou-li Z_1, Z_2 zobrazení množiny M, pak platí

$$Z(A) = (Z_1 \circ Z_2)(A) = Z_2[Z_1(A)], \text{ tj.}$$

$$Z(A) = A'' \Leftrightarrow (\exists A')\,[Z_1(A) = A' \wedge Z_2(A') = A''].$$

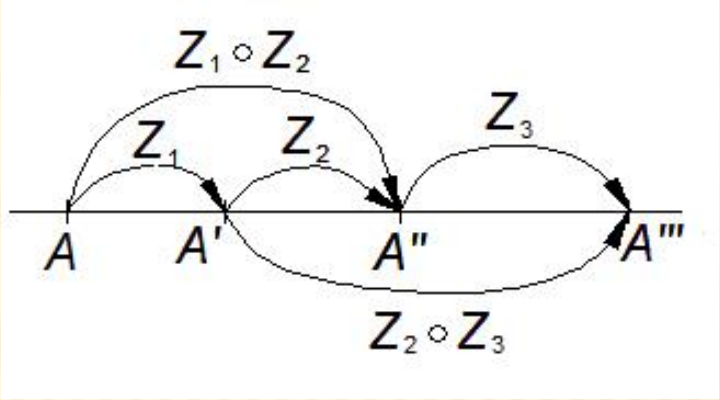
Danou operaci nazýváme **skládání zobrazení**.



Vlastnosti skládání zobrazení

***Věta* 1.1.1:** Skládání geometrických zobrazení **je asociativní**, tj. platí

$$(\forall\, Z_1, Z_2, Z_3) : (Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3 = Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3)$$



***Věta* 1.1.2:** Skládání geometrických zobrazení **není** obecně **komutativní**.

Věta 1.1.3: Skládání geometrických zobrazení **má neutrální prvek** – identitu *I*, přitom platí $Z \circ I = I \circ Z = Z$.

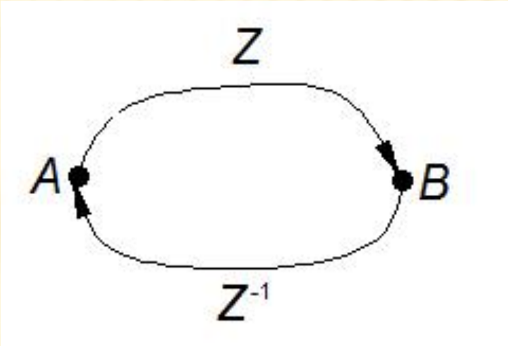
Věta 1.1.4: Skládání geometrických zobrazení **má inverzní prvek** – inverzní zobrazení.

Definice 1.1.11:

Ke každému prostému zobrazení Z můžeme sestrojit tzv. **inverzní zobrazení** (značíme Z^{-1}), které je dáno vztahem

$$Z \circ Z^{-1} = Z^{-1} \circ Z = I.$$

Poznámka: Je zřejmé, že $Z^{-1}(B) = A$, právě když $Z(A) = B$. Bod A, který je v zobrazení Z vzorem, se stává v zobrazení Z^{-1} obrazem a naopak.



Definice 1.1.12:

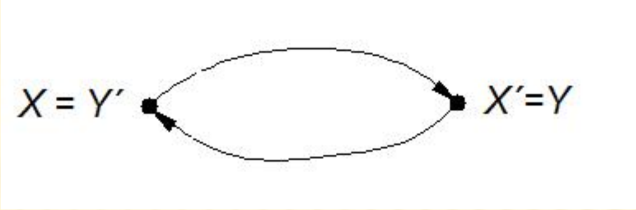
Zobrazení Z, které není identitou, nazýváme **involutorní zobrazení** (nebo též zkráceně **involuce**), právě když platí

$$Z^2 = Z \circ Z = I,$$

tj. involutorní zobrazení je inverzní samo k sobě, tedy $Z^{-1} = Z$.

Definice 1.1.13:

Je-li v daném zobrazení *Z* obrazem bodu *X* bod *X´* a obrazem bodu *Y* = *X´* bod *Y´* = *X*, pak takovou dvojici bodů nazýváme **involutorní dvojicí bodů** daného zobrazení *Z*.



1.2 Shodná zobrazení v rovině

1.2.1 Definice a vlastnosti shodného zobrazení

Definice 1.2.1:

Zobrazení v rovině, které každým dvěma různým bodům *X, Y* dané roviny přiřazuje body *X´, Y´* téže roviny tak, že $|XY| = |X´Y´|$, se nazývá **shodné zobrazení** v rovině (někdy též **izometrické zobrazení**).

Poznámka: Můžeme stručně říci, že shodné zobrazení zachovává vzdálenost bodů.

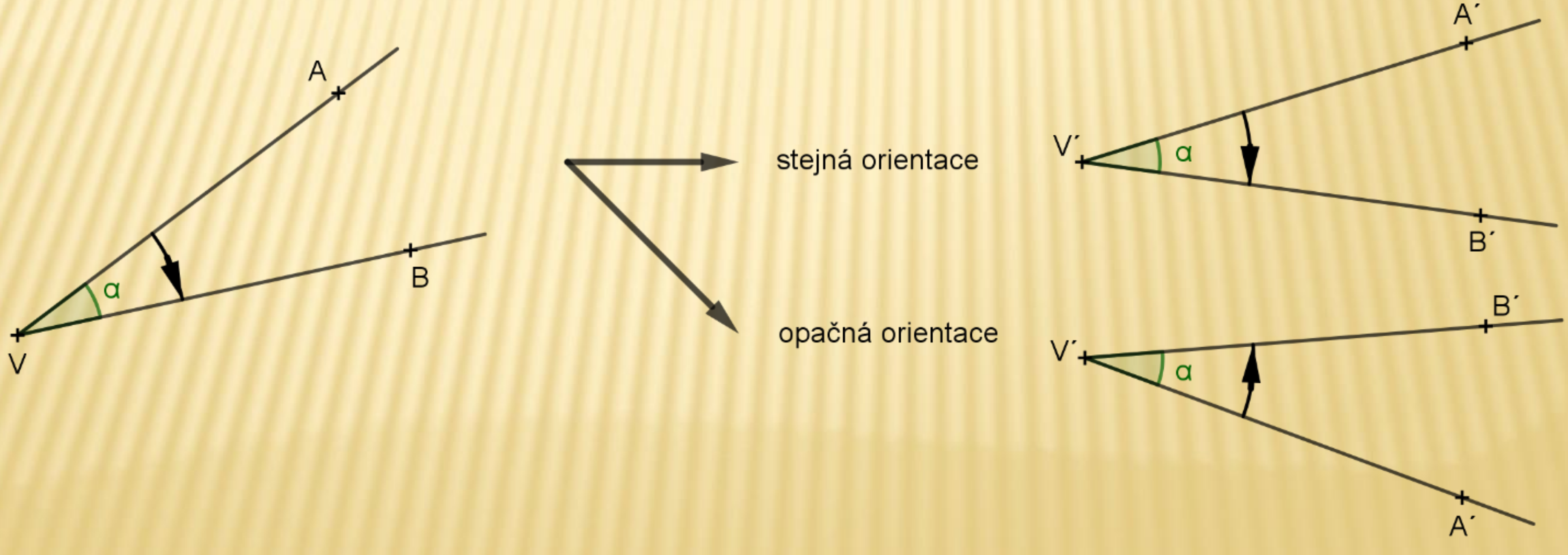
Poznámka:

V každém shodném zobrazení je obrazem

- - úsečky úsečka shodná s danou úsečkou,
- - přímky přímka,
- - polopřímky polopřímka,
- - poloroviny polorovina atd.
- Ve shodném zobrazení se
- - rovnoběžky zobrazí na rovnoběžky,
- - úhel se zobrazí na úhel s ním shodný apod.

Věta 1.2.1 (o určenosti shodného zobrazení v rovině): Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body *X*, *Y*, *Z* a třemi nekolineárními body *X´*, *Y´*, *Z´*, které jsou po řadě jejich obrazy.

Věta 1.2.2: Ve shodném zobrazení je orientace úhlu buď stejná, anebo opačná. Podle toho rozdělujeme **shodná zobrazení** na **přímá** (stejná orientace úhlu) a na **nepřímá** (opačná orientace úhlu).



Mezi shodná zobrazení v rovině řadíme:

1. **identitu**
2. **osovou souměrnost** (příklad nepřímého shodného zobrazení)
3. **středovou souměrnost**
4. **otočení**
5. **posunutí**

***Věta* 1.2.3:** Ke každému shodnému zobrazení *Z* existuje **inverzní zobrazení** $\boldsymbol{Z}^{-1}$.

***Věta* 1.2.4:** Každé shodné zobrazení v rovině se dá složit z konečného počtu těchto základních shodných zobrazení.

Poznámka: Shodná zobrazení v rovině s operací skládání zobrazení tvoří nekomutativní grupu.

1.2.2 Identita

Definice 1.2.2a:

Geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu $X \in U$, kde U je daný geometrický útvar, přiřazuje bod $X´$ geometrického útvaru $U´$, přičemž každý takový bod $X´$ je shodný s bodem X, tj. $X \equiv X´$, se nazývá **identické zobrazení** nebo-li **identita.** Značíme ***I*** nebo ***Id***.

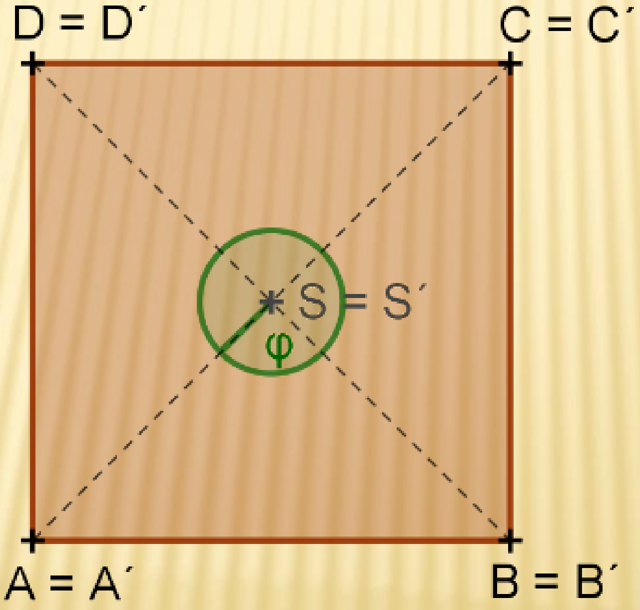
Definice 1.2.2b:

Identické zobrazení je geometrické zobrazení, které přiřazuje bodu útvaru ten samý bod stejného útvaru.

Důsledek: Všechny body geometrického útvaru U jsou tedy shodné s body útvaru $U´$, tj. $U \equiv U´$. Aplikací identického zobrazení se nic nezmění, výsledkem je tedy opět vstupní geometrický útvar.

Poznámka: Všechny body a obecně všechny útvary v rovině jsou pak samodružné. Každý vztah je invariantem.

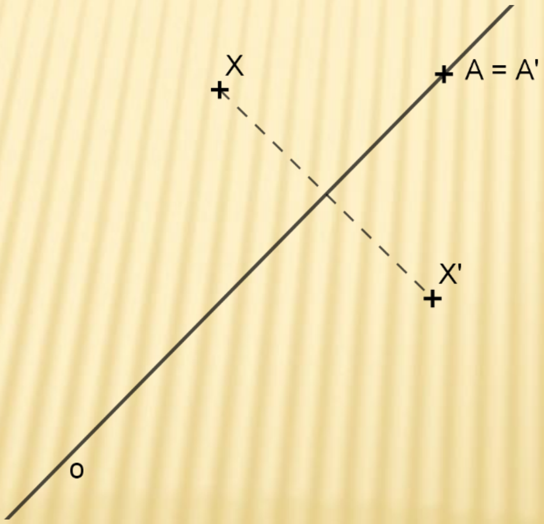
Příklad: Konkrétním příkladem identického zobrazení je např. otočení čtverce *ABCD* kolem jeho středu *S* o úhel $\varphi = +\,360°$.



1.2.3 Osová souměrnost

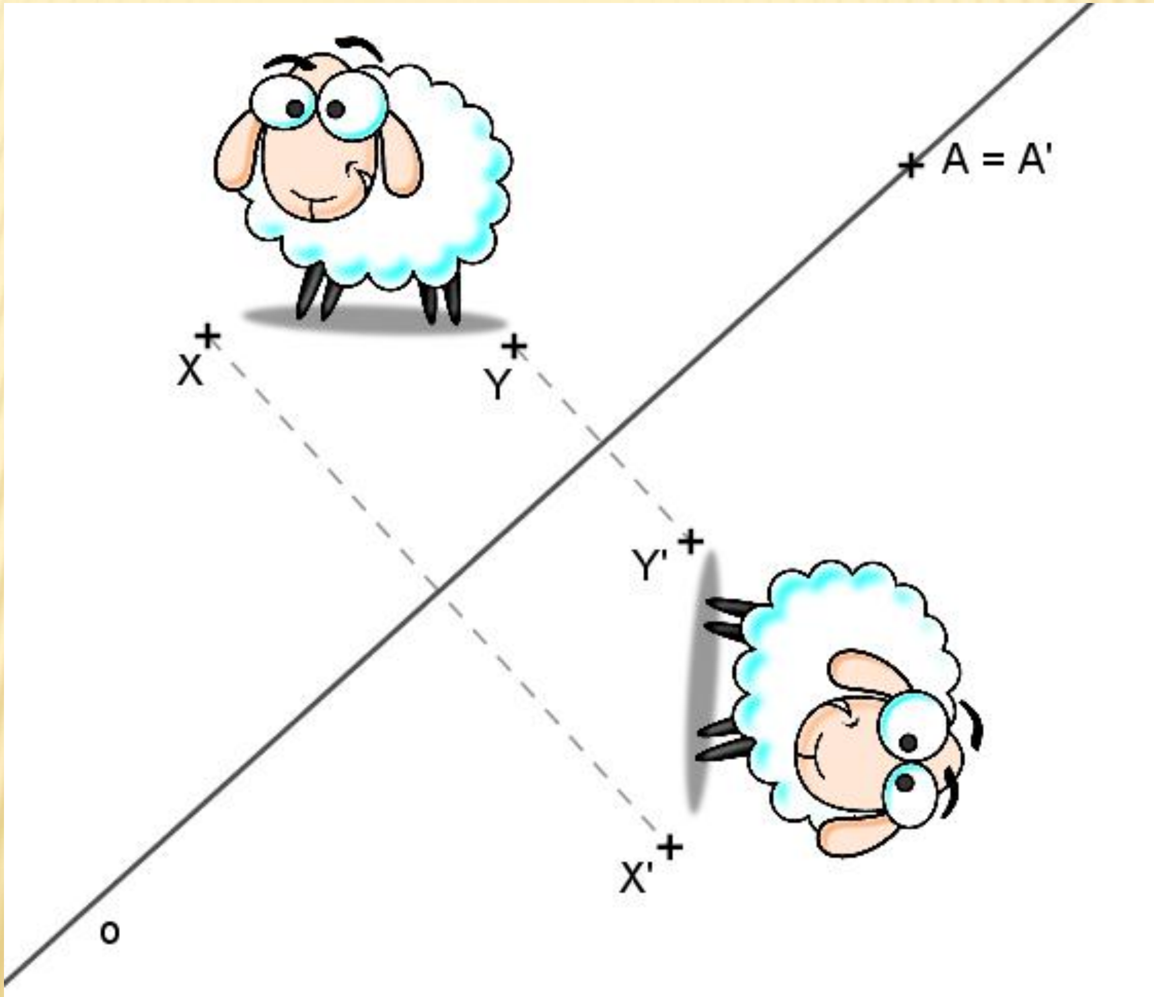
Definice 1.2.3:

Geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu $A \in o$, kde o je pevně zvolená přímka, přiřazuje týž bod $A \equiv A'$ a každému bodu $X \notin o$ přiřazuje bod X' tak, že přímka o je osou úsečky XX', se nazývá **osová souměrnost** (někdy též souměrnost podle osy). Přímka o se nazývá **osa souměrnosti**. Značíme $OS\ (o)$.



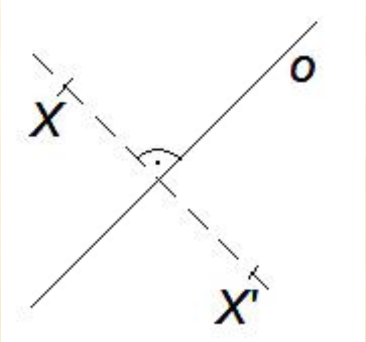
Poznámka:: Osová souměrnost je určena osou nebo jednou nesamodružnou dvojicí odpovídajících si bodů.

Příklad zobrazení objektu v osové souměrnosti



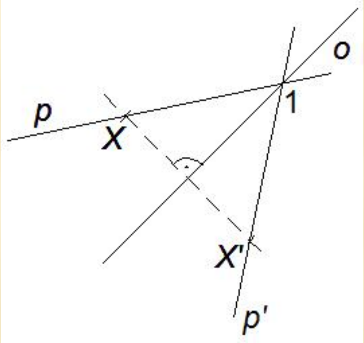
Základní vlastnosti osové souměrnosti jsou:

- odpovídající si body *X, X´* leží na kolmici k ose souměrnosti *o*;

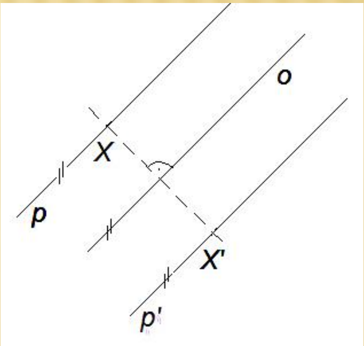


- přímce odpovídá přímka

  - je-li přímka *p* různoběžná s osou *o*, pak má se sobě odpovídající přímkou *p’* společný bod ležící na ose *o*



  - je-li přímka *p* rovnoběžná s osou *o*, potom i jí odpovídající přímka *p’* je rovnoběžná s osou *o*

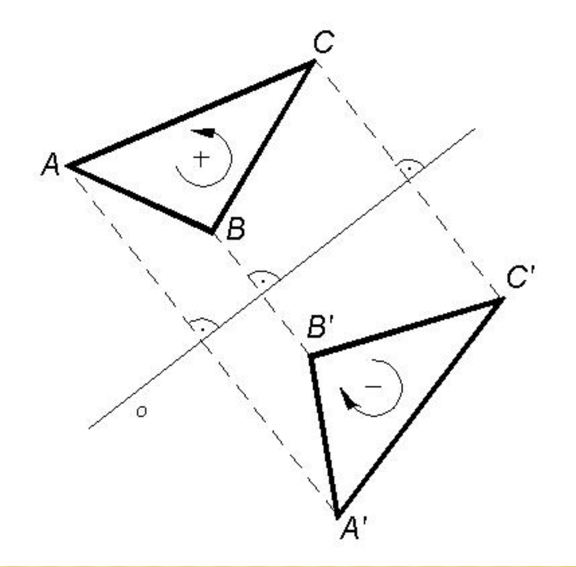


Věta 1.2.5: Osová souměrnost je sama k sobě inverzní, tj. složením dvou osových souměrností s touž osou souměrnosti *o* vzniká identita, osová souměrnost je tedy **involutorní zobrazení.**

Věta 1.2.6: Invarianty v osové souměrnosti jsou velikost úsečky a velikost úhlu.

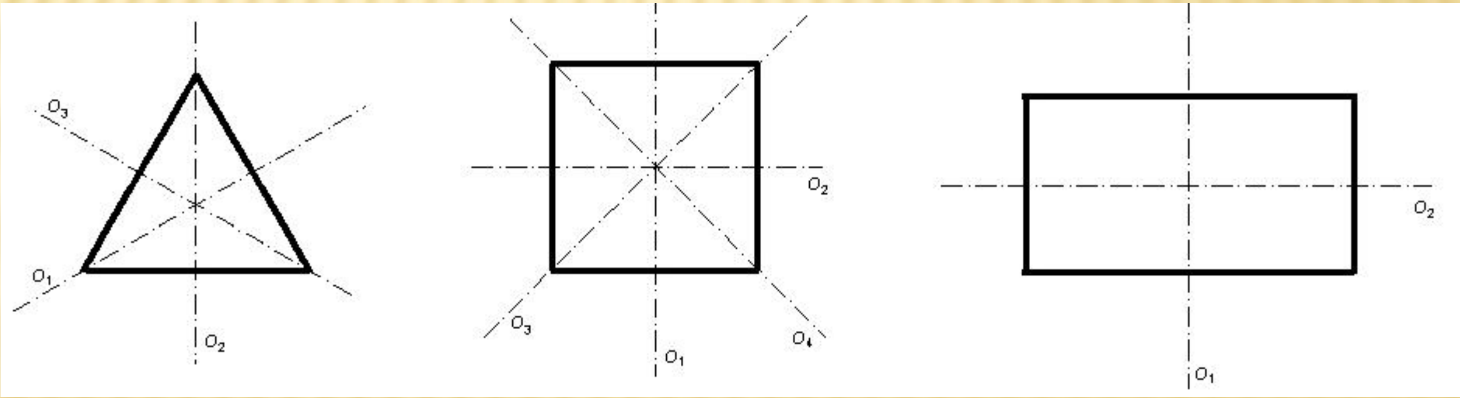
Věta 1.2.7: Osová souměrnost převádí každý orientovaný úhel v úhel nesouhlasně orientovaný. Osová souměrnost je příkladem nepřímé shodnosti.

Poznámka: Tj. sestrojený obraz je nutné přes průsvitku překlopit, abychom získali původní vzor.

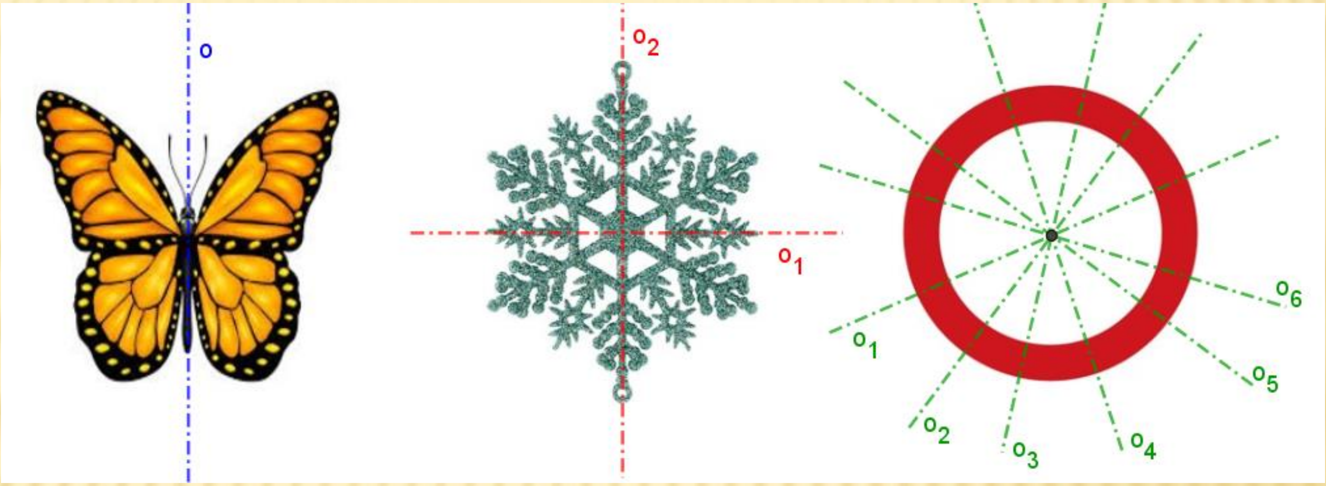


Samodružné prvky v osové souměrnosti:

- body – všechny body osy (*o*)
- přímky
  - osa souměrnosti *o* je tzv. **silně samodružnou přímkou** osové souměrnosti, neboť všechny její body jsou samodružné
  - všechny přímky kolmé k ose souměrnosti *o* jsou tzv. **slabě samodružné přímky** osové souměrnosti, tj. takové přímky, na nichž samodružným bodem je pouze jejich průsečík s osou souměrnosti *o*
- útvar *U*, který je samodružný v osové souměrnosti, tj. O (*U*) = *U*, nazýváme **osově souměrný útvar**



Definice 1.2.4: Útvar *U* je souměrný podle osy *o* právě tehdy, když je samodružný v osové souměrnosti podle osy *o;* tj. když platí *OS* (*o*): $U \rightarrow U' = U$.



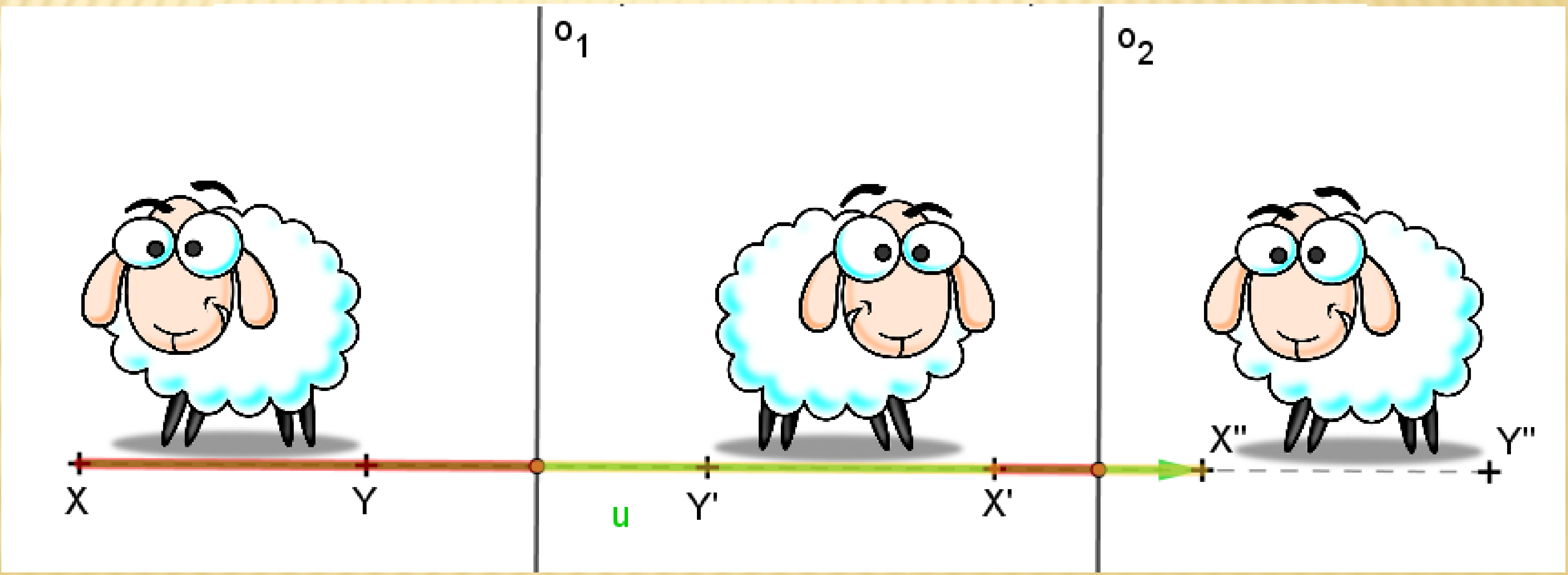
***Věta* 1.2.8:** Každé shodné zobrazení v rovině vznikne složením **nejvýše tří osových souměrností**

Platí:

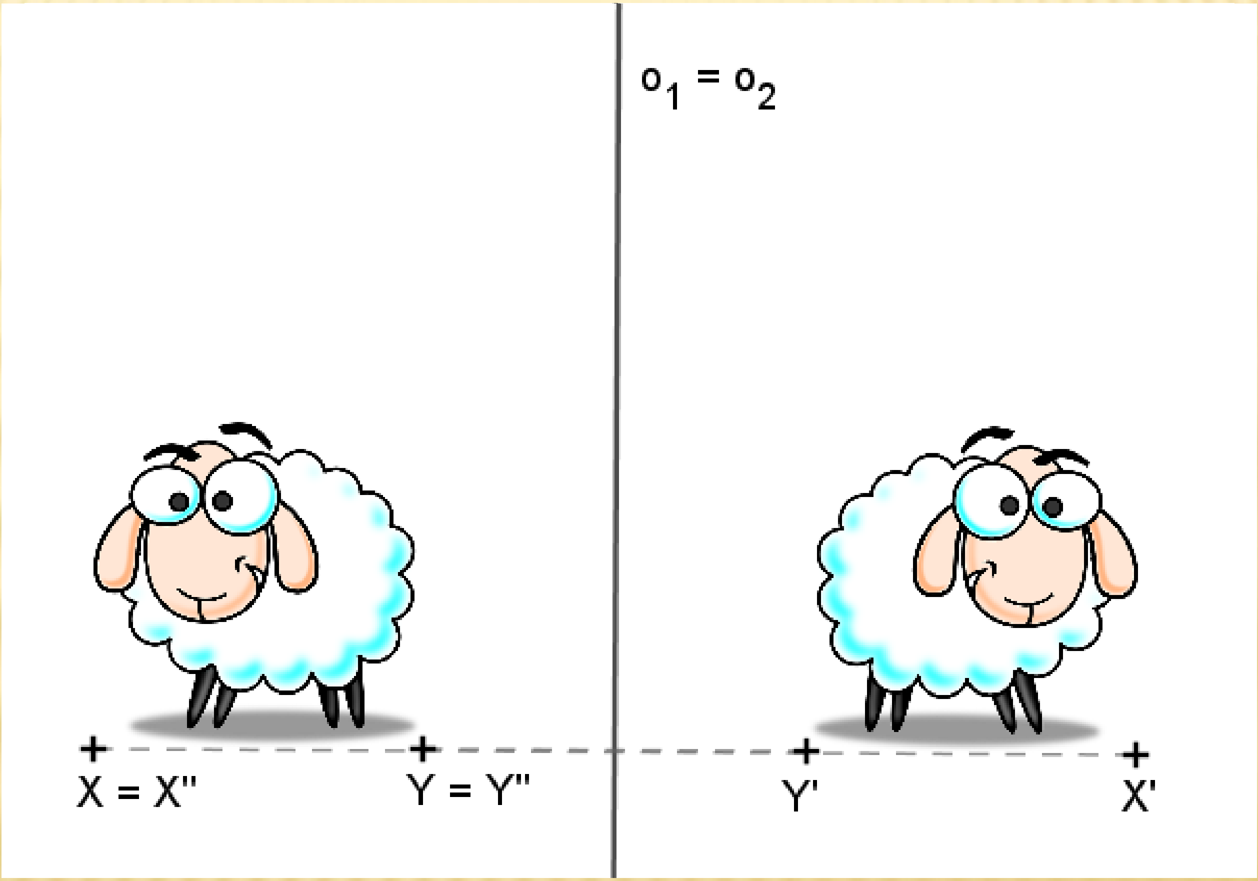
- složením osových souměrností **sudého počtu vznikne přímá shodnost** – identita, translace, rotace, středová souměrnost
- složením osových souměrností **lichého počtu vznikne nepřímá shodnost** – osová souměrnost, posunuté zrcadlení

Skládání osových souměrností

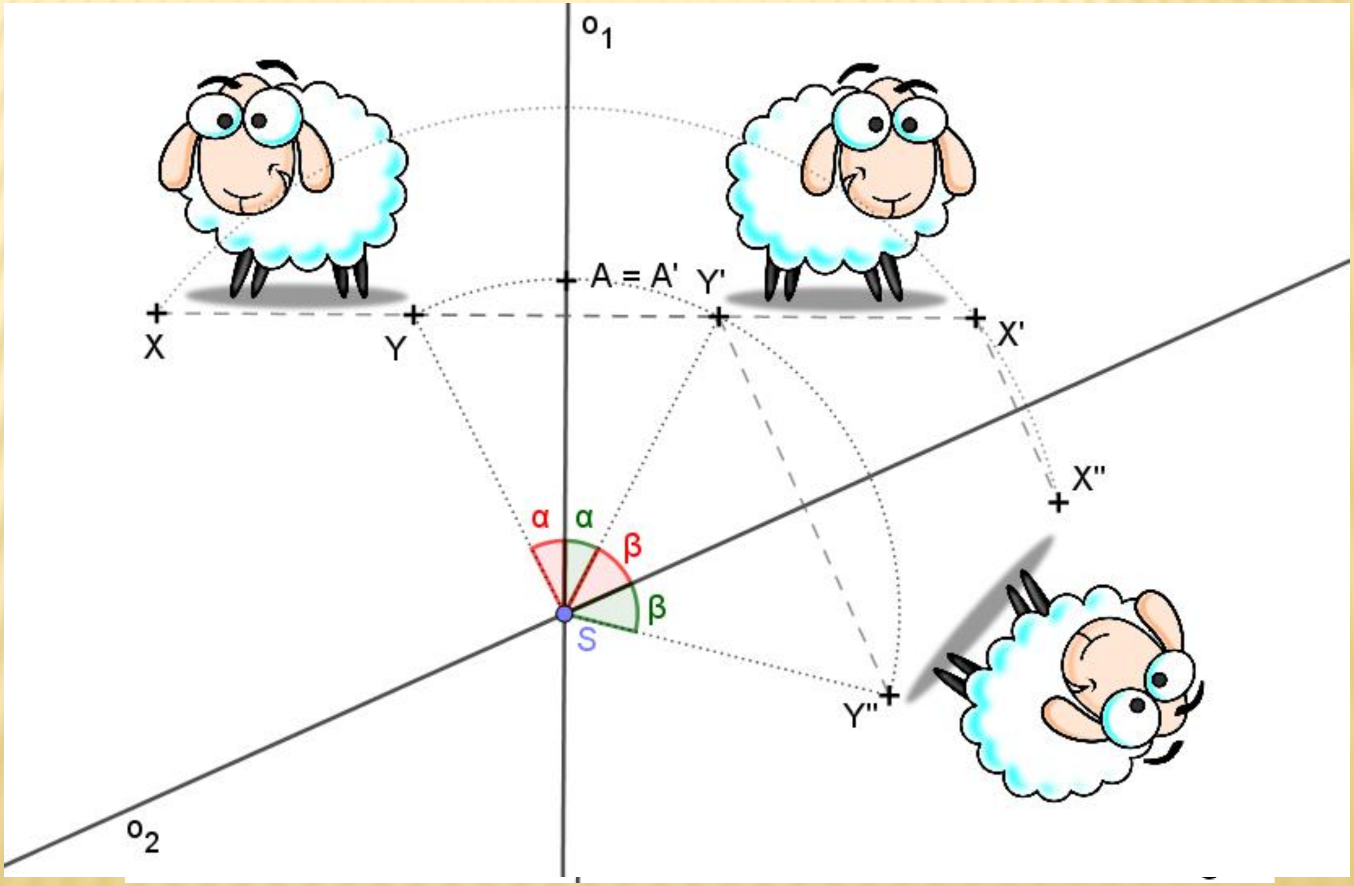
- **Skládání 2 osových souměrností**
  - ***osy rovnoběžné různé*** – složením vznikne **posunutí** (translace). Velikost posunutí je rovna dvojnásobku vzdálenosti os a směr posunutí je kolmý na osy obou souměrností. Smysl posunutí je jednoznačně určen pořadím os.



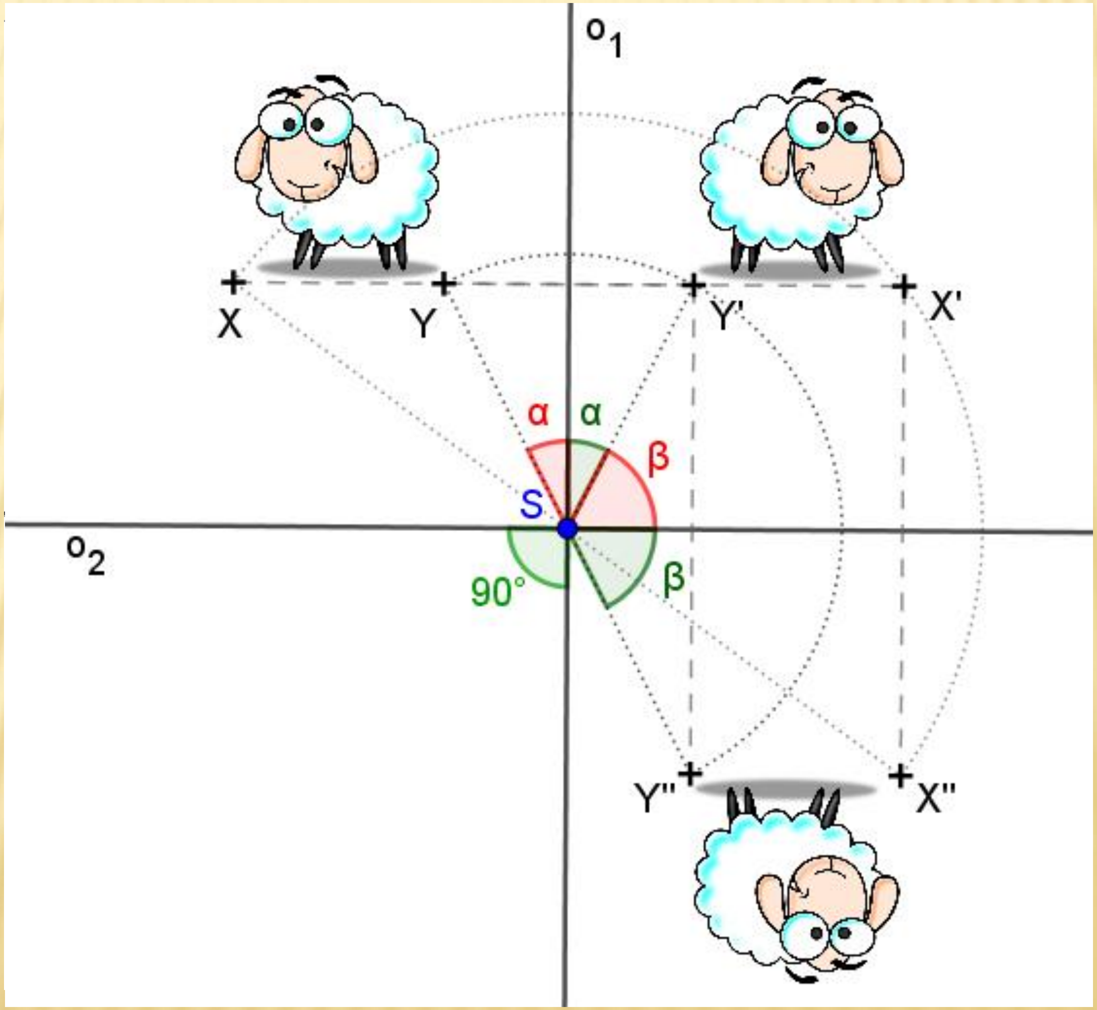
+ ***osy rovnoběžné splývající*** – složením vznikne **identita**



- ***osy různoběžné*** – složením vznikne **otočení** (rotace), jehož středem je průsečík obou různoběžných os. Velikost úhlu otočení je rovna dvojnásobku velikosti ostrého nebo pravého úhlu, který svírají osy o_1, o_2 obou osových souměrností. Smysl otočení je dán pořadím os.

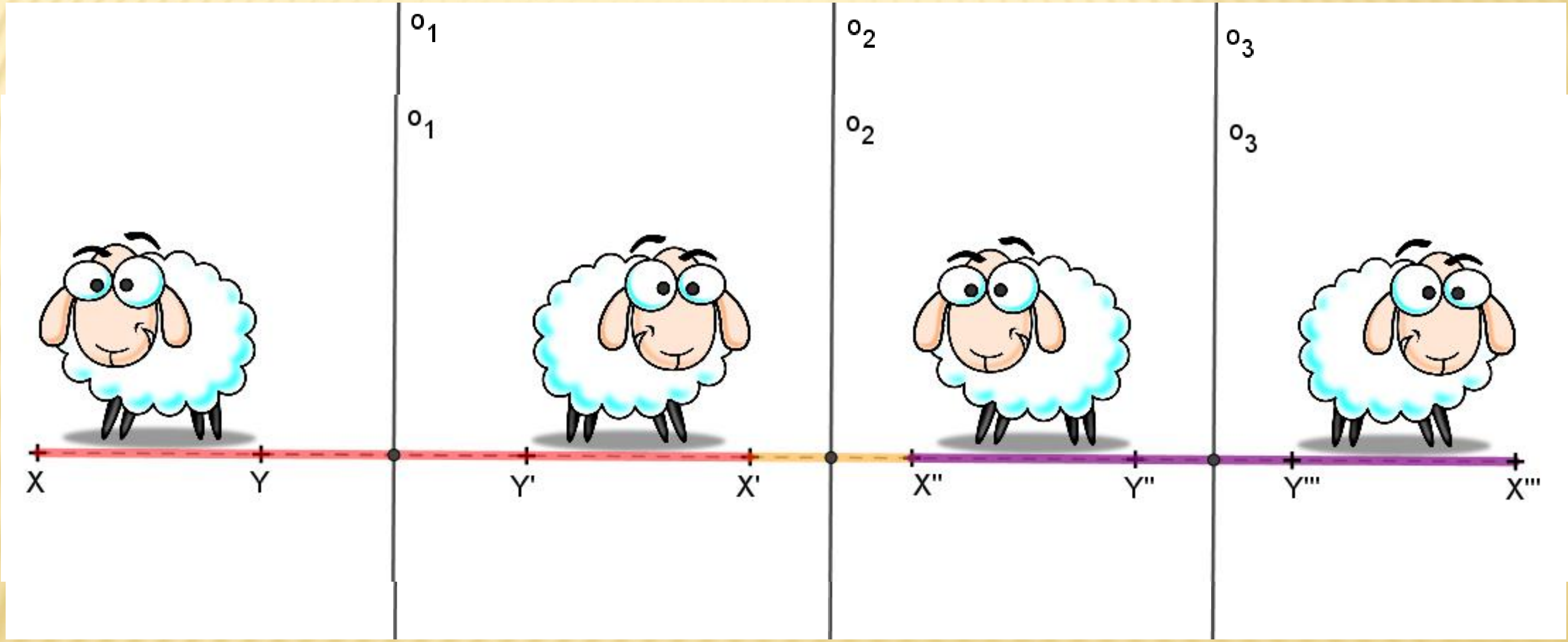


- ***osy různoběžné kolmé*** – složením vznikne **středová souměrnost** (rotace o 180°), jejímž středem je průsečík obou kolmých os.



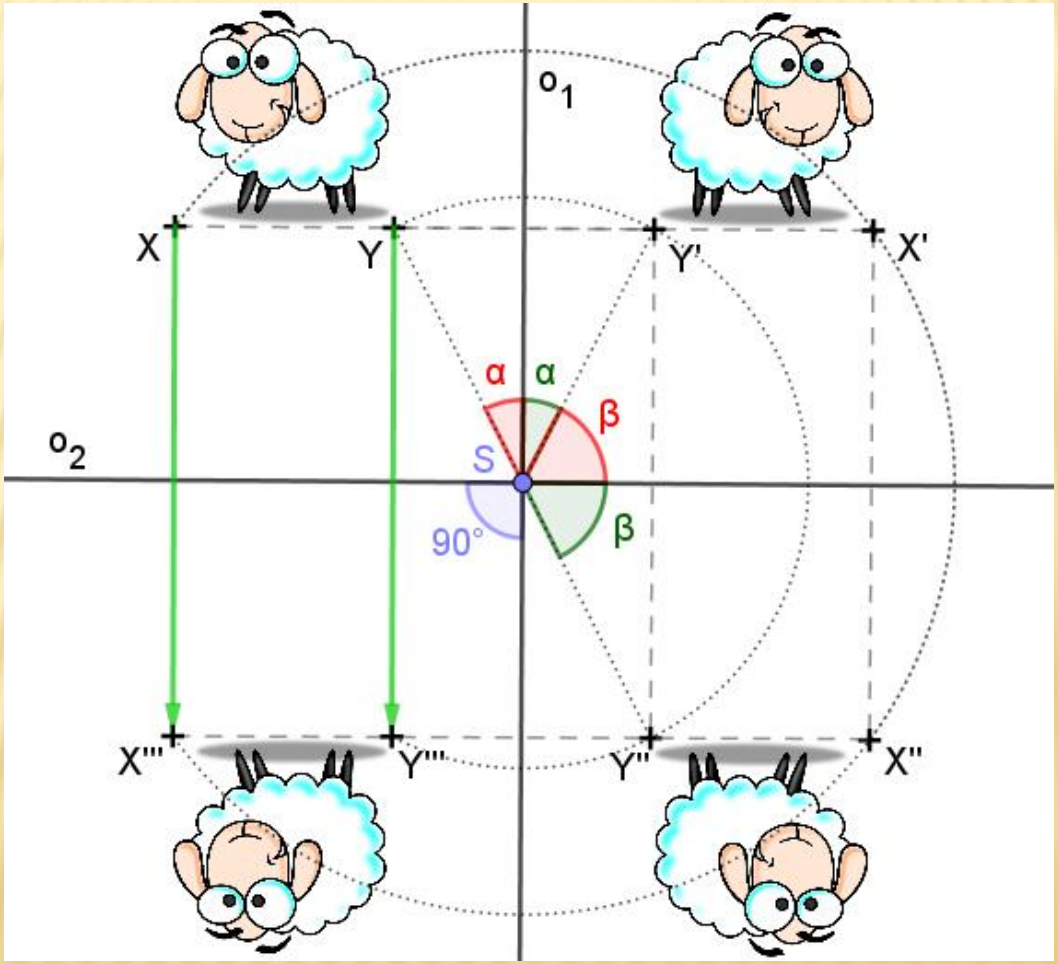
Skládání 3 osových souměrností

- osy navzájem rovnoběžné různé – složením vznikne **osová souměrnost**



Skládání 3 osových souměrností

- osy navzájem kolmé – složením vznikne **posunuté zrcadlení**



1.2.4 Otočení

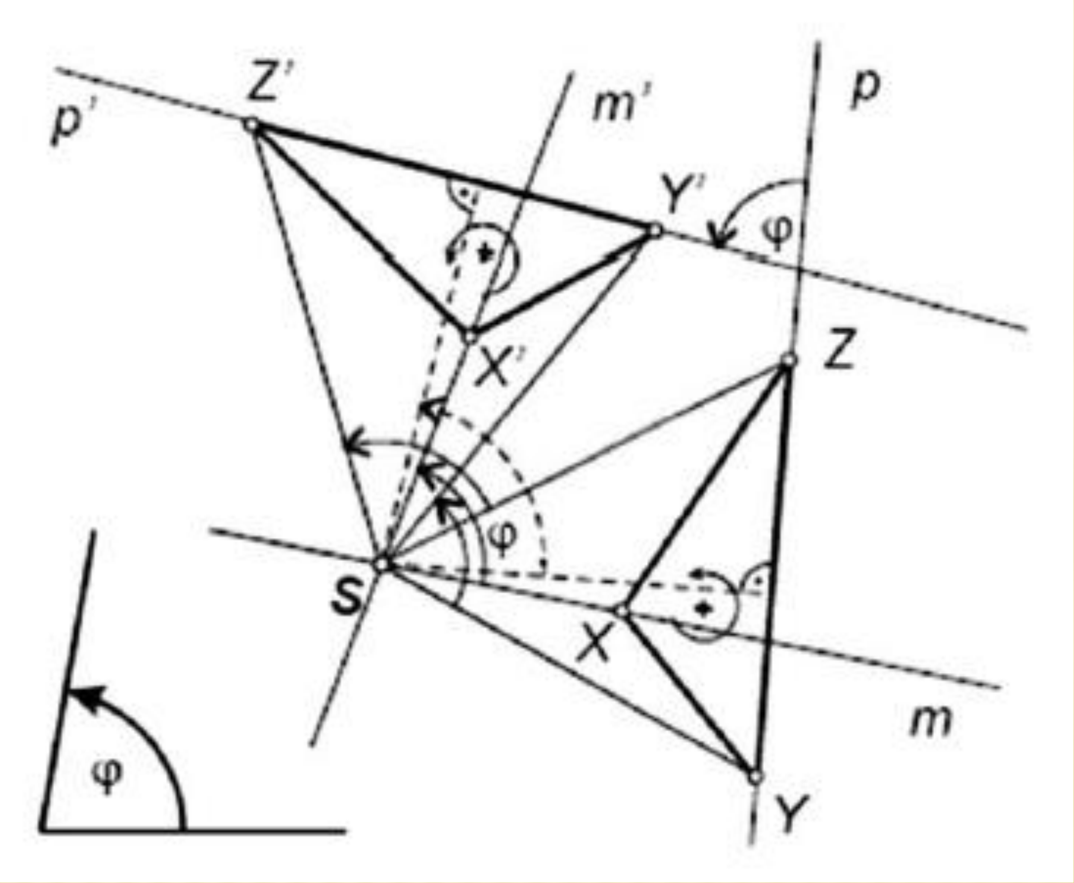
Definice 1.2.5:

Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu S roviny přiřazuje týž bod S a každému bodu $X \neq S$ roviny bod $X´$ téže roviny tak, že $|XS| = |X´S|$ a $\varphi = \angle X´SX$, kde φ je daný orientovaný úhel, se nazývá **otočení (rotace)** kolem bodu S o orientovaný úhel φ. Bod S se nazývá **střed otočení**, úhel φ se nazývá **úhel otočení** a orientace úhlu φ udává **smysl otočení**. Značíme $R(S, \varphi)$.

Poznámka: Otočení je určeno středem S a orientovaným úhlem φ nebo (nikoliv však jednoznačně – jen modulo $2k\pi$) středem S a jednou uspořádanou nesamodružnou dvojicí odpovídajících si bodů X, $X´$, které leží na téže kružnici se středem S.

Poznámka: Kladná orientace úhlu je proti směru hodinových ručiček, záporná orientace úhlu je po směru hodinových ručiček.

Poznámka: Otočení o úhel $\varphi = (2k+1)\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$, tj. o lichý násobek 180°, je **středová souměrnost.** Otočení o úhel $\varphi = 2k\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$, tj. o sudý násobek 180°, je **identita.**



Základní vlastnosti otočení jsou:

- odpovídající si body $X \neq S$, X' leží na kružnici se středem S a s poloměrem $r = |SX|$, přičemž orientovaný úhel $\angle XSX'$ je konstantní a rovná se úhlu otočení;
- přímce odpovídá přímka, přičemž obě přímky jsou stejně vzdáleny od středu S otočení a navzájem svírají úhel rovný úhlu otočení.

Samodružné prvky v otočení:

- **bod** – neidentické otočení ($\varphi \neq 2k\pi$) má jediný samodružný bod a to **střed otočení**
- **přímky** – samodružné přímky existují pouze v případě $\varphi = a\pi$:

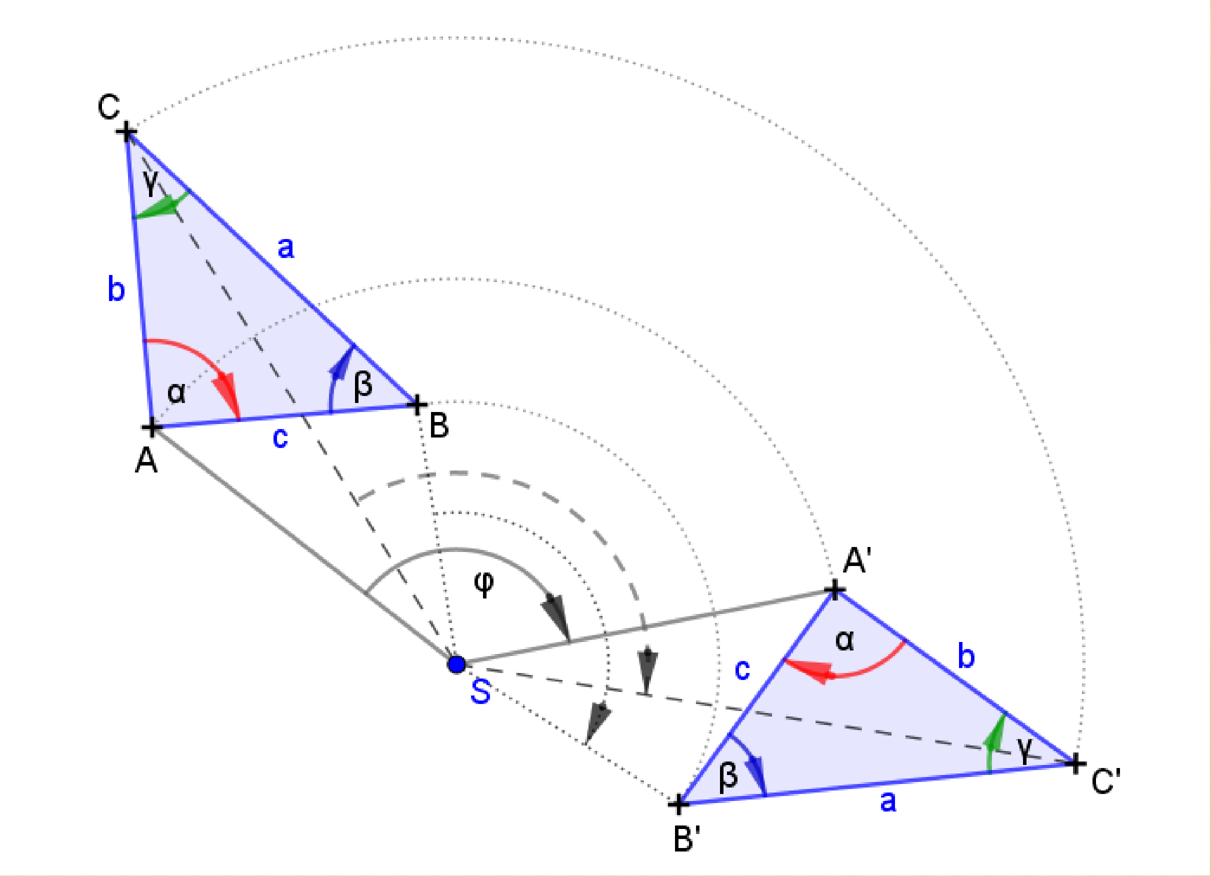
 - pro $a = 2k\pi$ (sudé) – **identita** – jsou všechny přímky **silně samodružné**;

 - pro $a = (2k+1)\pi$ (liché) – **středová souměrnost** – jsou všechny přímky procházející středem otočení **slabě samodružné**

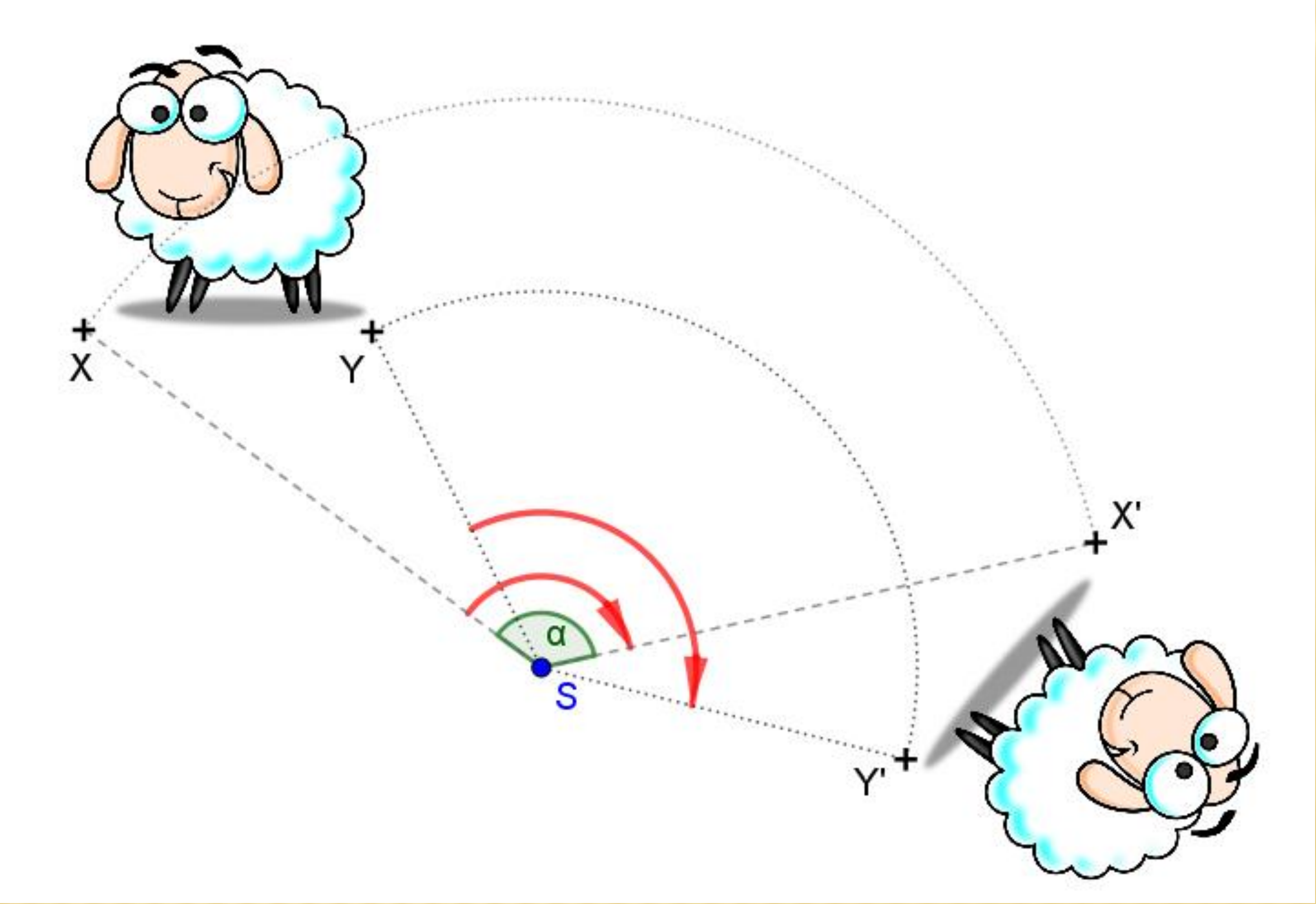
Věta 1.2.9: Inverzním zobrazením k otočení $R(S, \varphi)$ je otočení $R(S, -\varphi)$, tj. otočení se stejným středem S, úhlem φ, ale opačným smyslem otočení.

Věta* 1.2.10*: Invarianty jsou v otočení velikost úsečky a velikost úhlu.

Věta* 1.2.11*: Otočení převádí každý orientovaný úhel v úhel souhlasně orientovaný.



Příklad zobrazení objektu v otočení



Věta 1.2.12: Složení dvou osových souměrností s různoběžnými osami o_1, o_2 je otočení, jehož středem je průsečík obou různoběžných os. Velikost úhlu otočení je rovna dvojnásobku velikosti ostrého nebo pravého úhlu, který svírají osy o_1, o_2 obou osových souměrností. Smysl otočení je dán pořadím os.

Důkaz:

Buďte O_1, O_2 osové souměrnosti s různoběžnými osami o_1, o_2. Je zřejmé, že průsečík S přímek o_1, o_2 je jediným samodružným bodem složeného zobrazení Z. Libovolný bod $X \neq S$ přejde v osové souměrnosti O_1 do bodu X^* a bod X^* přejde v osové souměrnosti O_2 do bodu X', tj.

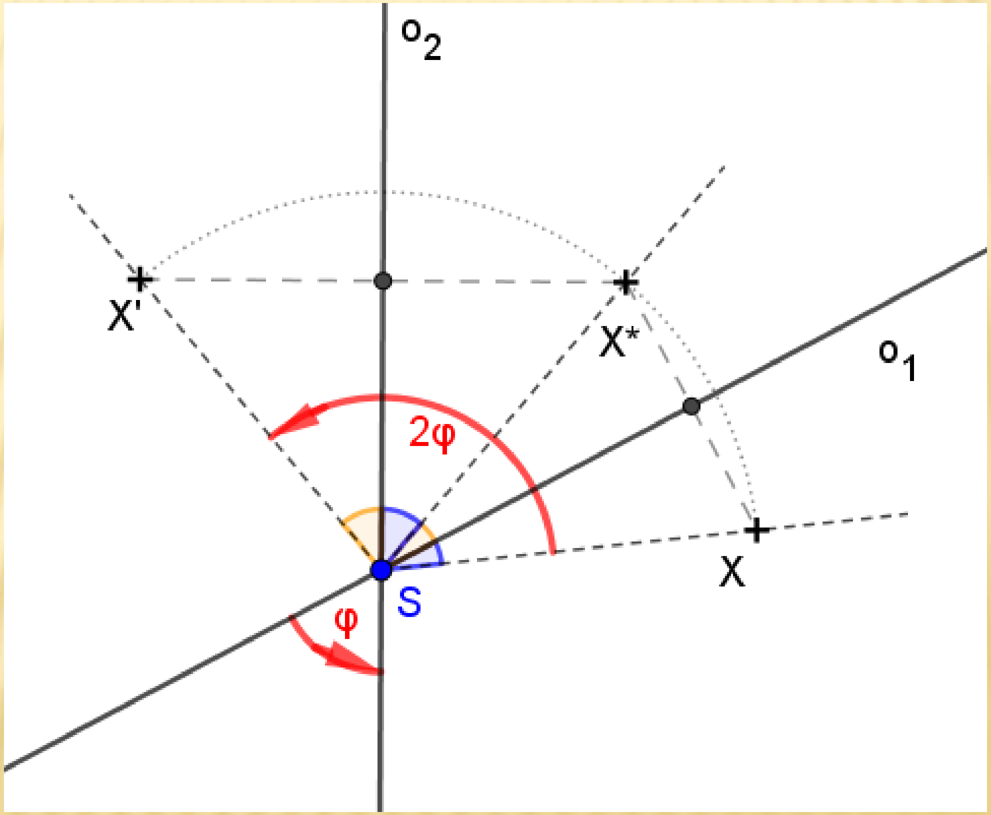
$$Z = O_1 \circ O_2 \colon X \to X'.$$

Je zřejmé, že $|SX| = |SX^*| = |SX'|$. Dále $|\angle\, SX, o_1| = |\angle\, o_1, SX^*|$ a $|\angle\, SX^*, o_2| = |\angle\, o_2, SX'|$, tj.

$$|\angle\, XSX'| = (|\angle\, SX, o_1| + |\angle\, o_1, SX^*|) + (|\angle\, SX^*, o_2| + |\angle\, o_2, SX'|) =$$

$$= 2 \cdot |\angle\, o_1, SX^*| + 2 \cdot |\angle\, SX^*, o_2| = 2 \cdot |\angle\, o_1, o_2|.$$

Odpovídající si body $X \neq S$, X' leží na kružnici se středem S a s poloměrem $r = |SX|$, přičemž orientovaný úhel $\angle XSX'$ je konstantní a rovná se dvojnásobku orientovaného úhlu φ určeného přímkami o_1, o_2, tj. $Z = R(S, 2\varphi)$. Přičemž při postupu záleží na pořadí os, které udává smysl otočení.



K výše uvedené větě platí i věta obrácená.

Věta 1.2.13: Každé otočení lze rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem souměrnosti. Za jednu osu lze zvolit libovolnou přímku procházející středem souměrnosti, druhá osa je pak určena jednoznačně.

Důkaz:

Otočení R je určeno středem S a jednou uspořádanou nesamodružnou dvojicí odpovídajících si bodů $A, A´$, které leží na téže kružnici se středem S. Zvolíme $o_1 = SA$; potom O_1: $S \to S, A \to A$. Dále zvolíme o_2 – osa úhlu $ASA´$; potom O_2: $S \to S, A \to A´$. V zobrazení $O_1 \circ O_2$, které je podle předcházející věty otočením, přechází bod A do bodu $A´$.

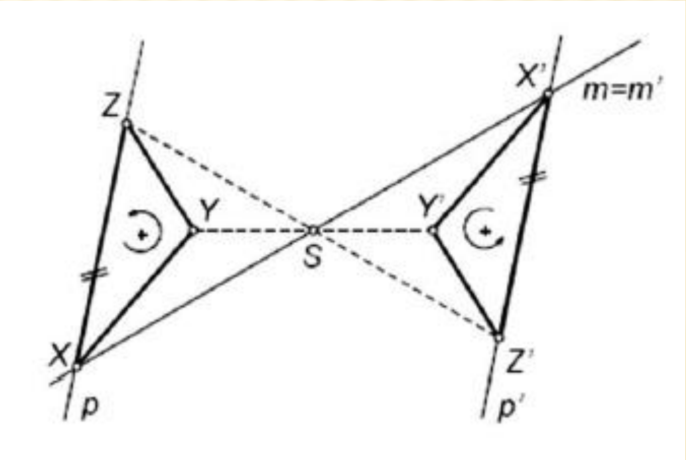
Dvojice $A, A´$ byla vybrána libovolně, a proto i osa o_1 je zvolena libovolně. Osa o_2 je již evidentně volena jednoznačně.

1.2.5 Středová souměrnost

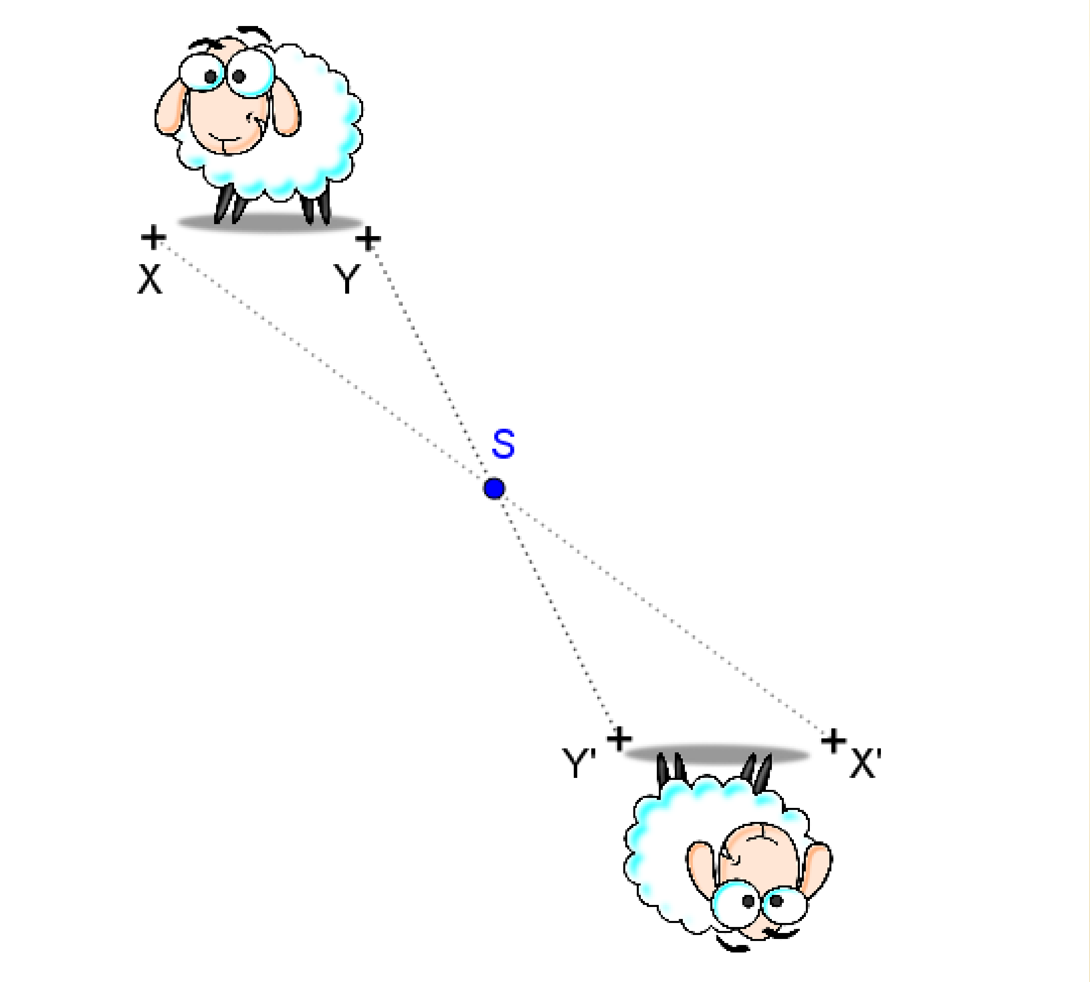
Definice 1.2.6:

Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu *S* roviny přiřazuje týž bod *S* a každému bodu $X \neq S$ bod *X´* téže roviny tak, že bod *S* je středem úsečky *XX´*, se nazývá **středová souměrnost** (**souměrnost podle středu**). Bod *S* se nazývá **střed souměrnosti**. Značíme *SS* (*S*).

Poznámka: Středová souměrnost je určena středem souměrnosti nebo jednou nesamodružnou dvojicí odpovídajících si bodů.



Příklad zobrazení objektu ve středové souměrnosti



Základní vlastnosti středové souměrnosti jsou:

- středová souměrnost je **involutorní zobrazení**;
- odpovídající si body *X, X´* leží na přímce procházející středem souměrnosti;
- přímce odpovídá přímka s ní rovnoběžná

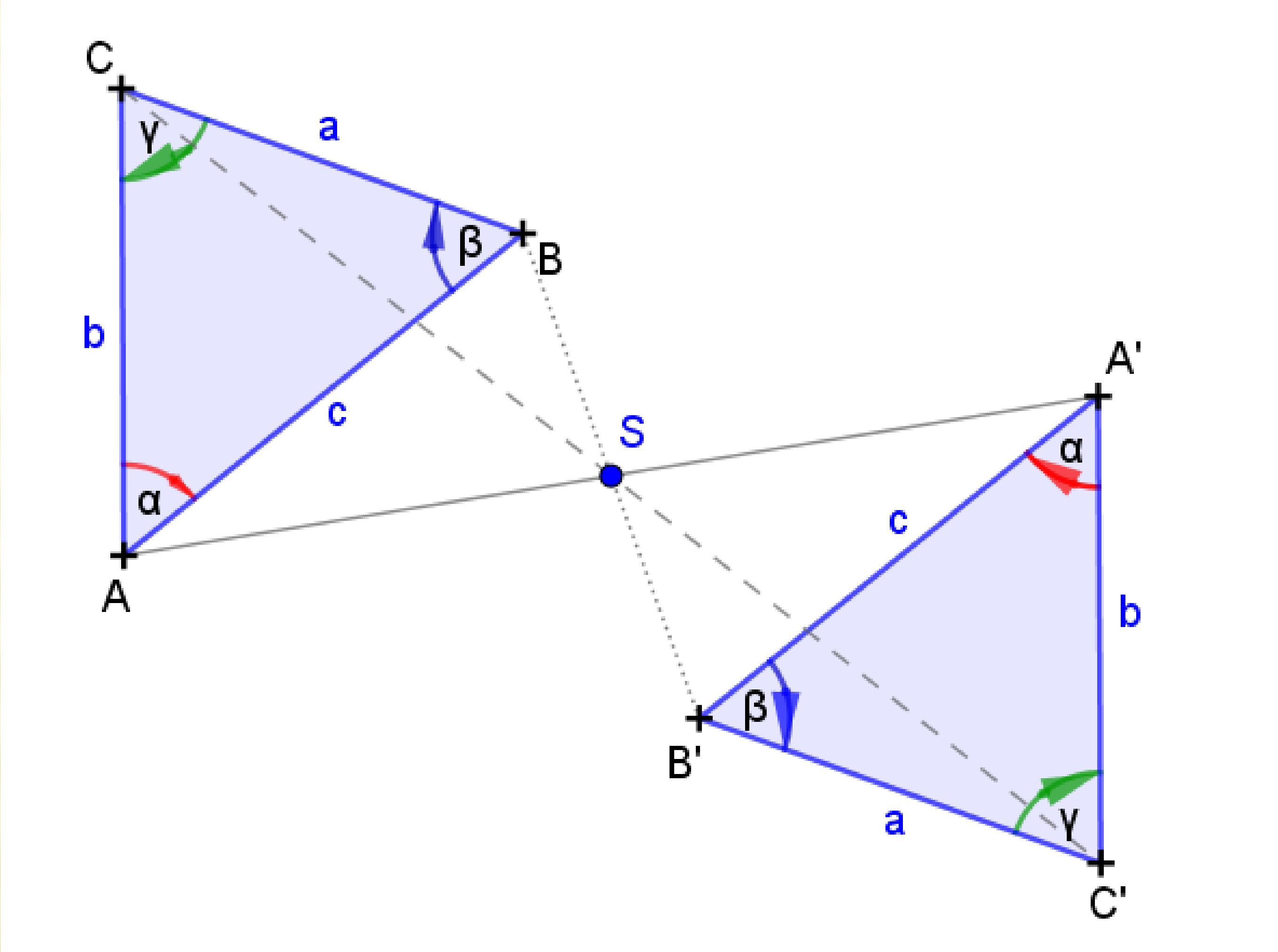
Samodružné prvky ve středové souměrnosti:

- body – existuje jediný **samodružný bod – střed souměrnosti**;
- přímky:
  - **každá přímka procházející středem souměrnosti** je **slabě samodružná;**
  - **silně samodružné přímky** ve středové souměrnosti **neexistují**

***Věta* 1.2.14:** Ve středové souměrnosti jsou invarianty velikost úsečky a velikost úhlu.

***Věta* 1.2.15:** Středová souměrnost převádí každý orientovaný úhel v úhel souhlasně orientovaný. Středová souměrnost je příkladem přímé shodnosti.

Poznámka: Tj. sestrojený obraz se přes průsvitku nepřeklápí, jen otáčí.



C
a
γ
β
B
b
c
α
A
S
A'
α
c
b
β
B'
a
γ
C'

Věta 1.2.16: Složením dvou osových souměrností s osami na sebe kolmými je středová souměrnost, jejímž středem je průsečík obou kolmých os.

Důkaz:

Buďte O_1, O_2 osové souměrnosti s osami o_1, o_2, které jsou na sebe kolmé. Je zřejmé, že průsečík S přímek o_1, o_2 je jediným samodružným bodem složeného zobrazení Z. Libovolný bod $X \neq S$ přejde v osové souměrnosti O_1 do bodu X^* a bod X^* přejde v osové souměrnosti O_2 do bodu X', tj.

$$Z = O_1 \circ O_2 : X \rightarrow X'.$$

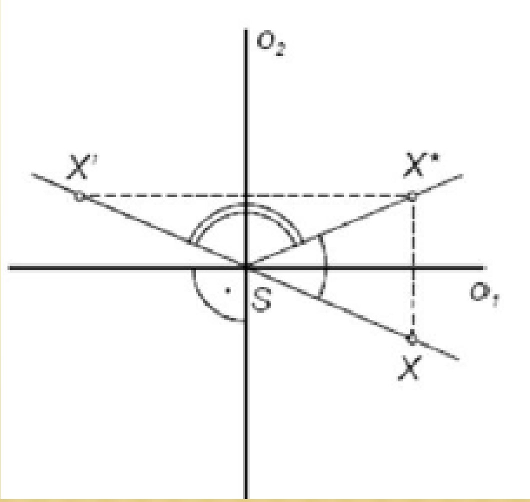
Je vidět, že platí $|SX| = |SX^*| = |SX'|$ a dále také, že $|\angle SX, o_1| = |\angle o_1, SX^*|$ a $|\angle SX^*, o_2| = |\angle o_2, SX'|$, tj.

$|\angle XSX'| = (|\angle SX, o_1| + |\angle o_1, SX^*|) + (|\angle SX^*, o_2| +$

$+ |\angle o_2, SX'|) = 2 \cdot |\angle o_1, SX^*| + 2 \cdot |\angle SX^*, o_2| =$

$= 2 \cdot |\angle o_1, o_2| = 2 \cdot 90° = 180°$.

Body X, S, X' jsou tedy kolineární a navíc bod S je středem úsečky XX', tj. $Z = S_S$ (S).



K větě 1.2.16 platí i věta obrácená.

Věta 1.2.17: Každou středovou souměrnost lze rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou kolmé různoběžky procházející středem souměrnosti. Za jednu osu lze volit libovolnou přímku procházející středem souměrnosti, druhá osa je pak určena jednoznačně.

Důkaz:

Nechť bod S je střed souměrnosti Z, dále nechť A je libovolný bod různý od bodu S a bod $A´$ je jeho obraz. Zvolíme $o_1 = AA´$, potom pro souměrnost O_1 platí, že O_1: $A \to A$. Dále zvolíme přímku o_2 jako osu úsečky $AA´$. Zde pro zobrazení O_2 platí, že O_2: $A \to A´$. V zobrazení $O_1 \circ O_2$ ($o_1 \perp o_2$), které je podle předcházející věty středovou souměrností, přechází bod A do bodu $A´$.

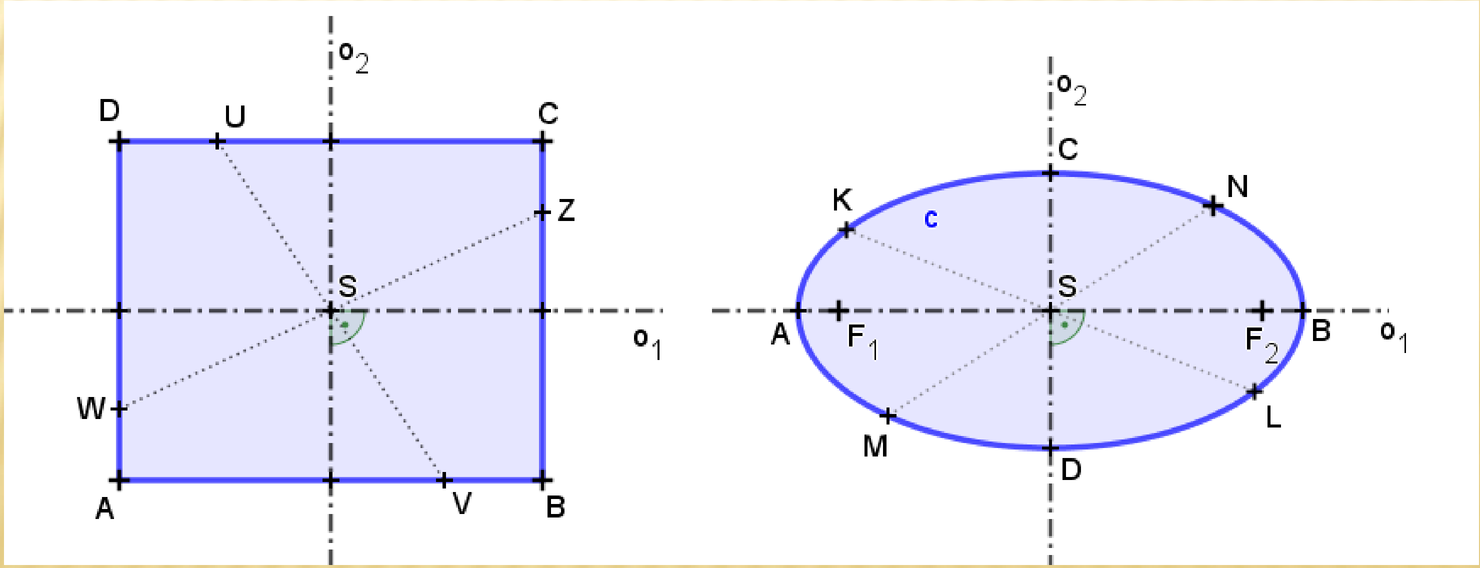
Dvojice bodů A, $A´$ byla vybrána libovolně, a proto i osa o_1 je zvolena libovolně. Osa o_2 je již evidentně volena jednoznačně.

Definice 1.2.7:

Útvar *U* je souměrný podle středu *S* právě tehdy, když je samodružný ve středové souměrnosti podle středu *S*, tj. *SS (S): U → U´ = U.*

***Věta* 1.2.18:** Má-li útvar dvě osy souměrnosti, které jsou na sebe kolmé, pak je středově souměrný podle jejich průsečíku.

Věta obrácená k větě 1.2.17 však neplatí. Např. kosodélník je středově souměrný, ale není osově souměrný.



STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST je důležitou vlastností rovnoběžníků.

Definice 1.2.8:

Je dán trojúhelník *ABC,* bod *S* je střed *AC*. Bod *D* je obrazem bodu *B* v souměrnosti se středem *S.* Sjednocení trojúhelníků *ABC* a *ACD* nazveme rovnoběžník *ABCD.*

Poznámka:

- Je – li Δ *ABC* rovnoramenný se základnou *AC,* vznikne *KOSOČTVEREC.*
- Je – li Δ *ABC* pravoúhlý s přeponou *AC,* vznikne *OBDÉLNÍK.*
- Je – li Δ *ABC* rovnoramenný pravoúhlý s přeponou *AC,* vznikne *ČTVEREC.*

Platí:

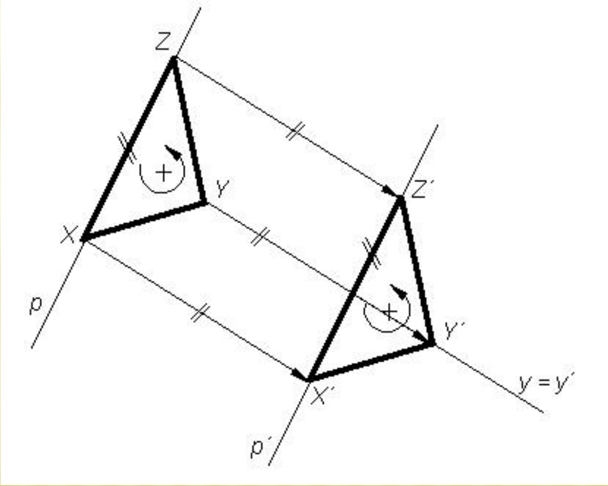
- Protější strany jsou rovnoběžné a shodné.
- Úhlopříčky se vzájemně půlí.
- Protější vnitřní úhly jsou shodné, součet sousedních úhlů je úhel přímý.

1.2.6 Posunutí

Definice 1.2.9:

Geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu X roviny přiřazuje bod $X' \neq X$ téže roviny tak, že pro každou další dvojici odpovídajících si bodů Y, Y' dané roviny platí, že úsečky XY' a YX' mají společný střed, se nazývá **posunutí** (**translace**). Směr, který je určen orientovanou úsečkou XX', se nazývá **směr posunutí**, velikost orientované úsečky XX' se nazývá **velikost posunutí** a pořadí bodů X, X' určuje **smysl posunutí**. Značíme $T\,(XX')$.

Poznámka: Posunutí je určeno směrem, velikostí a smyslem nebo jednou uspořádanou dvojicí odpovídajících si bodů.



Základní vlastnosti posunutí jsou:

- všechny přímky XX', YY', ZZ', … jsou navzájem rovnoběžné, tj. přímce odpovídá přímka s ní rovnoběžná;
- všechny úsečky XX', YY', ZZ', … jsou navzájem shodné*;*

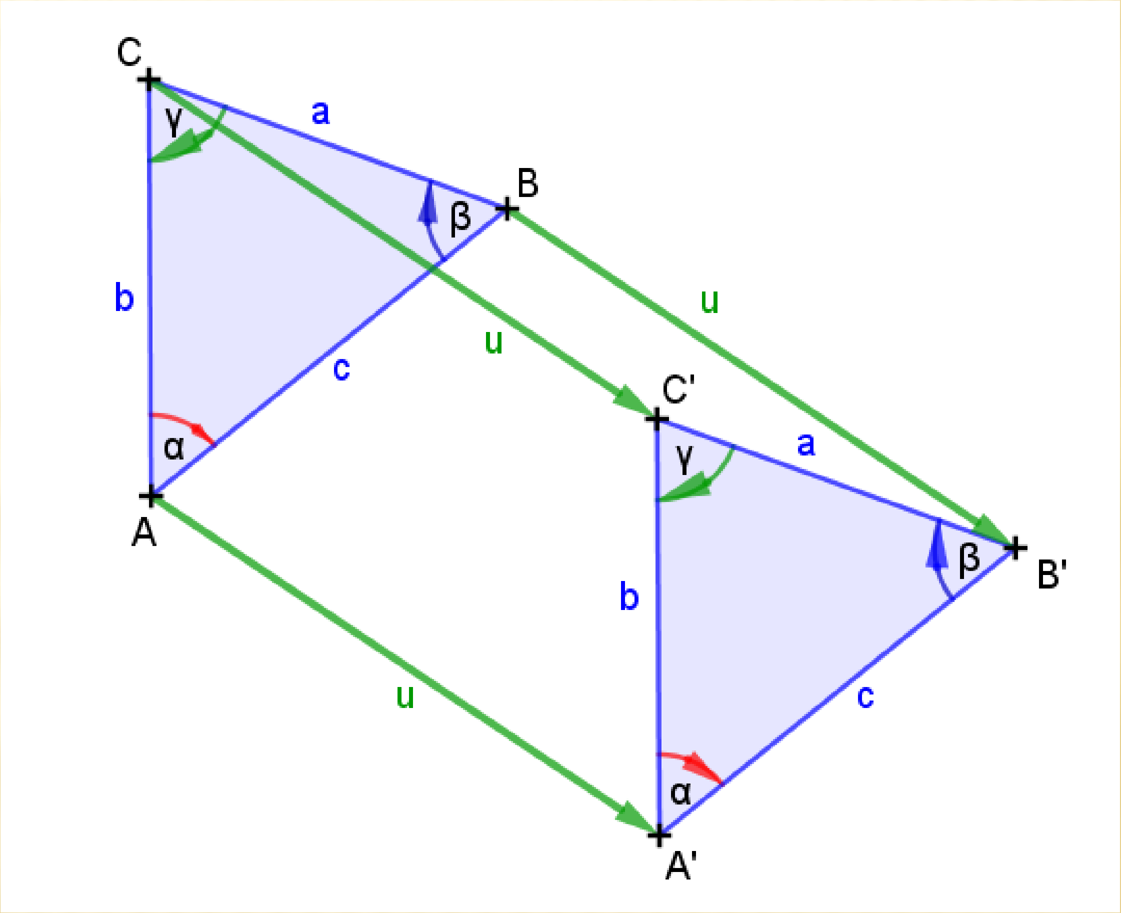
Samodružné prvky v posunutí:

- body – neexistuje **žádný samodružný bod**;
- přímky:
  - všechny **slabě samodružné přímky** jsou právě přímky náležející směru posunutí**;**
  - **silně samodružné přímky** v posunutí **neexistují.**

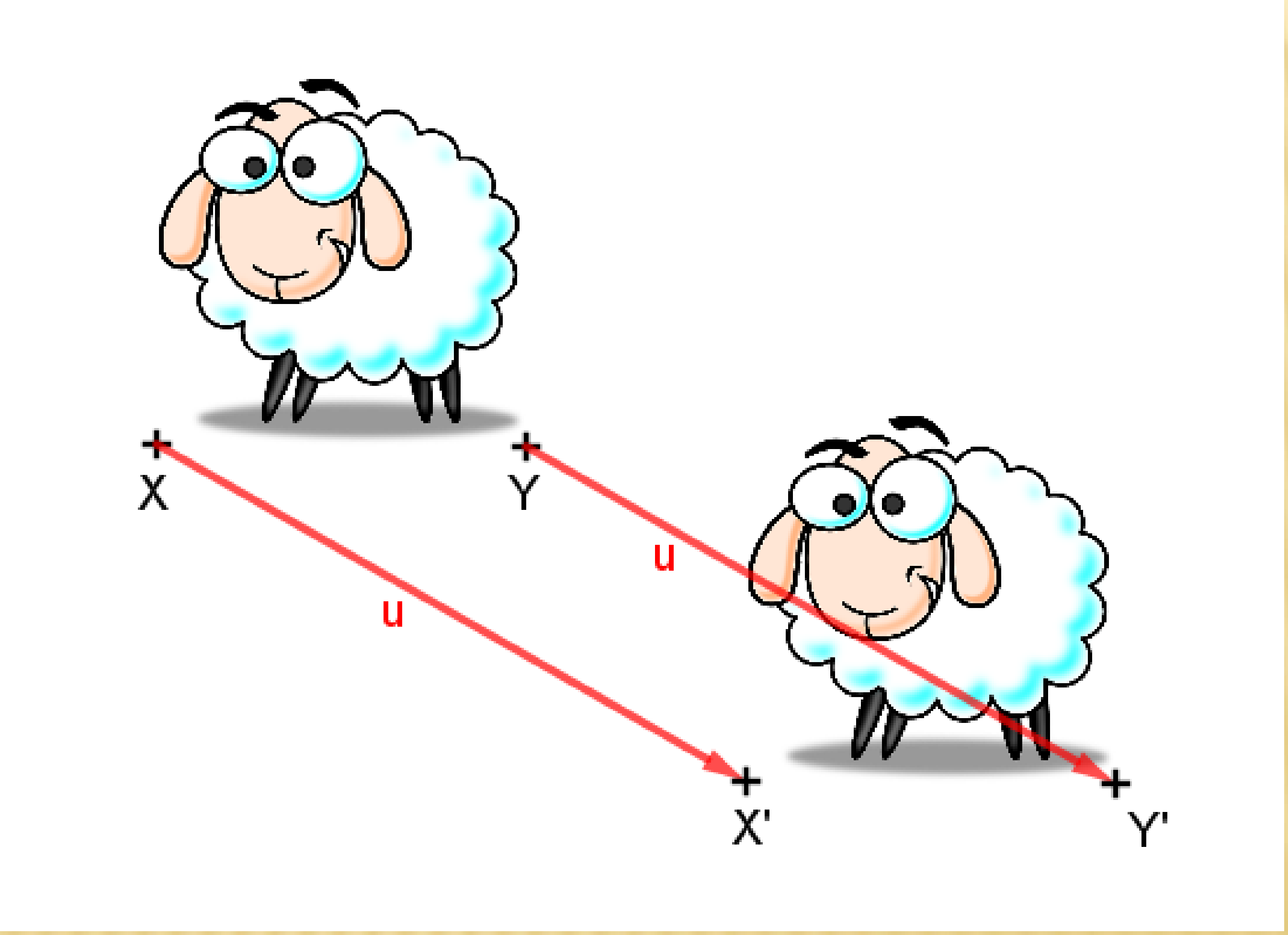
Věta **1.2.19:** Inverzním zobrazením k posunutí $T: X \rightarrow X'$ je posunutí $T: X' \rightarrow X$, tj. posunutí o stejném směru, stejné velikosti, ale opačném smyslu.

***Věta* 1.2.20:** V posunutí jsou invarianty velikost úsečky a velikost úhlu.

***Věta* 1.2.21:** Posunutí převádí každý orientovaný úhel v úhel souhlasně orientovaný.



Příklad zobrazení objektu v posunutí



***Věta* 1.2.22:** Složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami vzniká posunutí. Velikost posunutí je rovna dvojnásobku vzdálenosti os a směr posunutí je kolmý na osy obou souměrností. Smysl posunutí je jednoznačně určen pořadím os.

Důkaz:

Buďte O_1, O_2 osové souměrnosti s navzájem rovnoběžnými osami o_1, o_2. Libovolný bod X přejde v osové souměrnosti O_1 do bodu X^* a bod X^* přejde v osové souměrnosti O_2 do bodu X', tj.

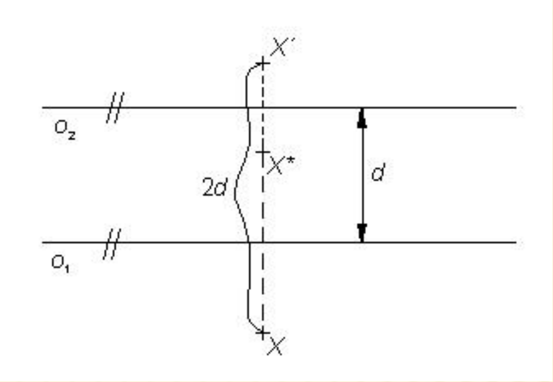
$$Z = O_1 \circ O_2 \colon X \to X'.$$

Z vlastností osové souměrnosti plyne, že přímka XX' je kolmá na osy souměrností o_1, o_2. Dále $|X, o_1| = |o_1, X^*|$ a $|X^*, o_2| = |o_2, X'|$, tj.

$$|XX'| = (|X, o_1| + |o_1, X^*|) + (|X^*, o_2| + |o_2, X'|) =$$

$$= 2 \cdot |o_1, X^*| + 2 \cdot |X^*, o_2| = 2 \cdot |o_1, o_2|.$$

Všechny přímky XX' jsou navzájem rovnoběžné (neboť všechny jsou kolmé na $o_1 \,//\, o_2$) a navíc všechny úsečky XX' jsou navzájem shodné, tj. $Z = T\,(XX')$. Při postupu záleží na pořadí os, který udává smysl posunutí.



K větě 1.2.22 platí i věta obrácená

Věta 1.2.23: Každé posunutí lze rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem rovnoběžné. Za jednu osu lze volit libovolnou přímku kolmou k přímkám směru posunutí, druhá osa je pak určena jednoznačně.

Důkaz:

Posunutí T je určeno jednou uspořádanou dvojicí odpovídajících si bodů A, $A´$. Zvolíme $o_1 \perp AA´ \wedge A \in o_1$; potom souměrnost O_1: $A \to A$. Dále zvolíme přímku o_2 - osu úsečky $AA´$ (tj. $o_1 \parallel o_2$); potom souměrnost O_2: $A \to A´$.

V zobrazení $O_1 \circ O_2$, které je podle věty 1.2.21 posunutím, přechází bod A do bodu $A´$. Dvojice bodů A, $A´$ byla vybrána libovolně, a proto i osa o_1 je zvolena libovolně. Osa o_2 je již evidentně volena jednoznačně.