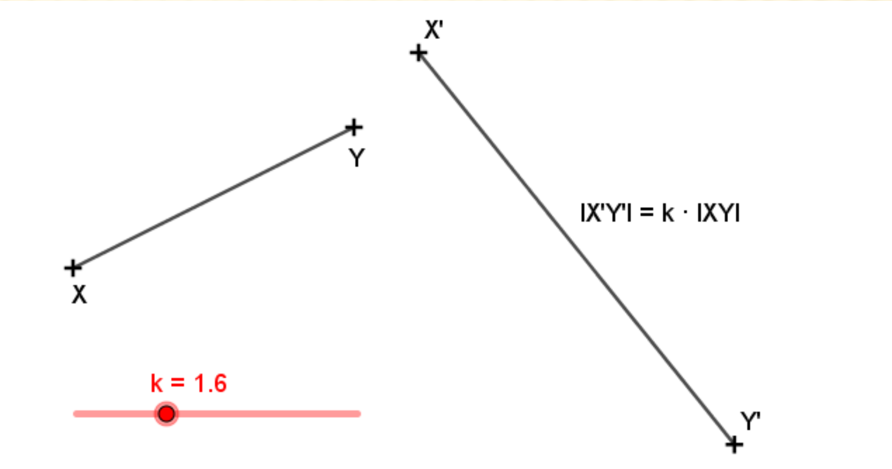
1.3 Podobná zobrazení v rovině

1.3.1 Definice a vlastnosti podobného zobrazení

Definice 1.3.1:

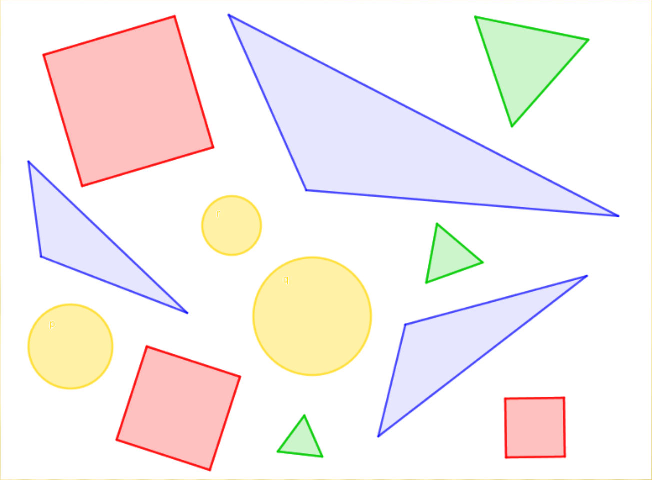
Geometrické zobrazení v rovině se nazývá **podobné zobrazení** (**podobnost**) s reálným koeficientem $k > 0$, jestliže pro každou úsečku XY a její obraz $X'Y'$ platí rovnost $|X'Y'| = k \cdot |XY|$. Koeficient k nazýváme **koeficient podobnosti**.



Definice 1.3.2:

Podobnost je geometrické zobrazení jednoho geometrického útvaru na jiný útvar se stejným tvarem, ale různou velikostí.

Poznámka: Dva geometrické útvary jsou si podobné, pokud mají oba stejný tvar. Tj. podobný útvar vznikne jako výsledek rovnoměrného zmenšení či zvětšení daného útvaru a jeho případné rotace, posunutí či zrcadlení.

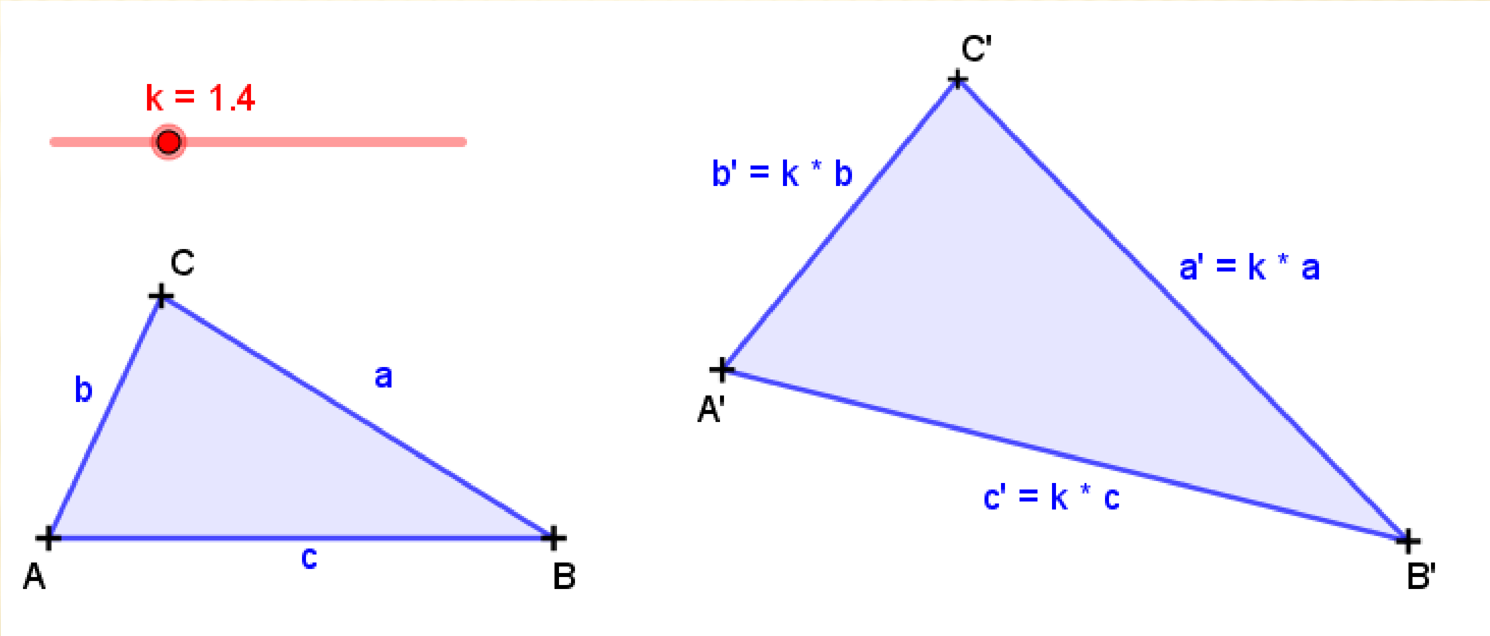


Poznámka: Speciálním případem podobnosti, je-li koeficient podobnosti roven jedné, je shodnost. Všechny shodné tvary jsou tedy zároveň podobné.

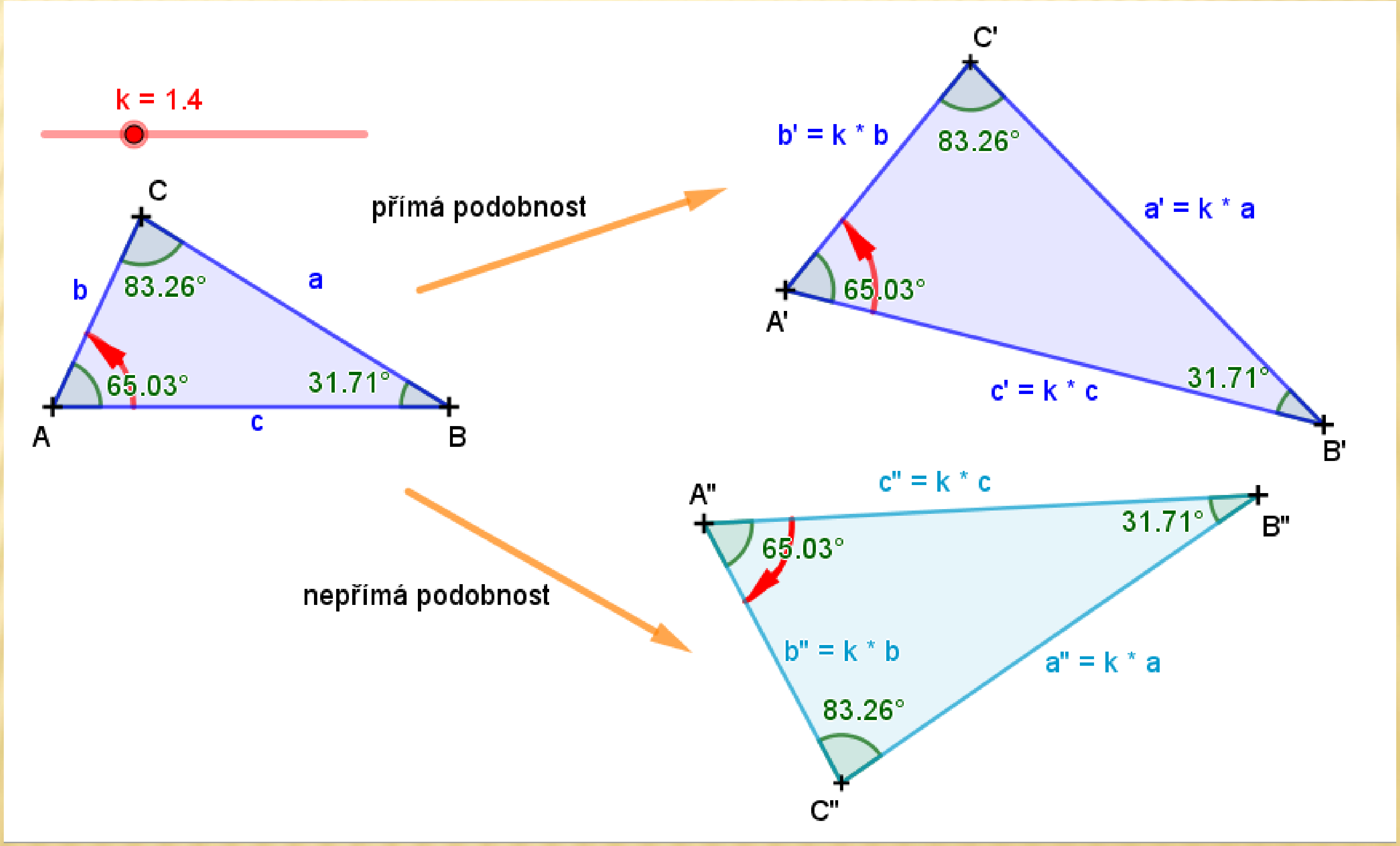
Poznámka: Autoři některých učebnic geometrie vyčleňují shodné útvary z definice podobných útvarů, proto za podobné útvary uvažují pouze útvary shodných tvarů, ale různých velikostí.

Poznámka: Podobnost zachovává velikost úhlů a poměr délek.

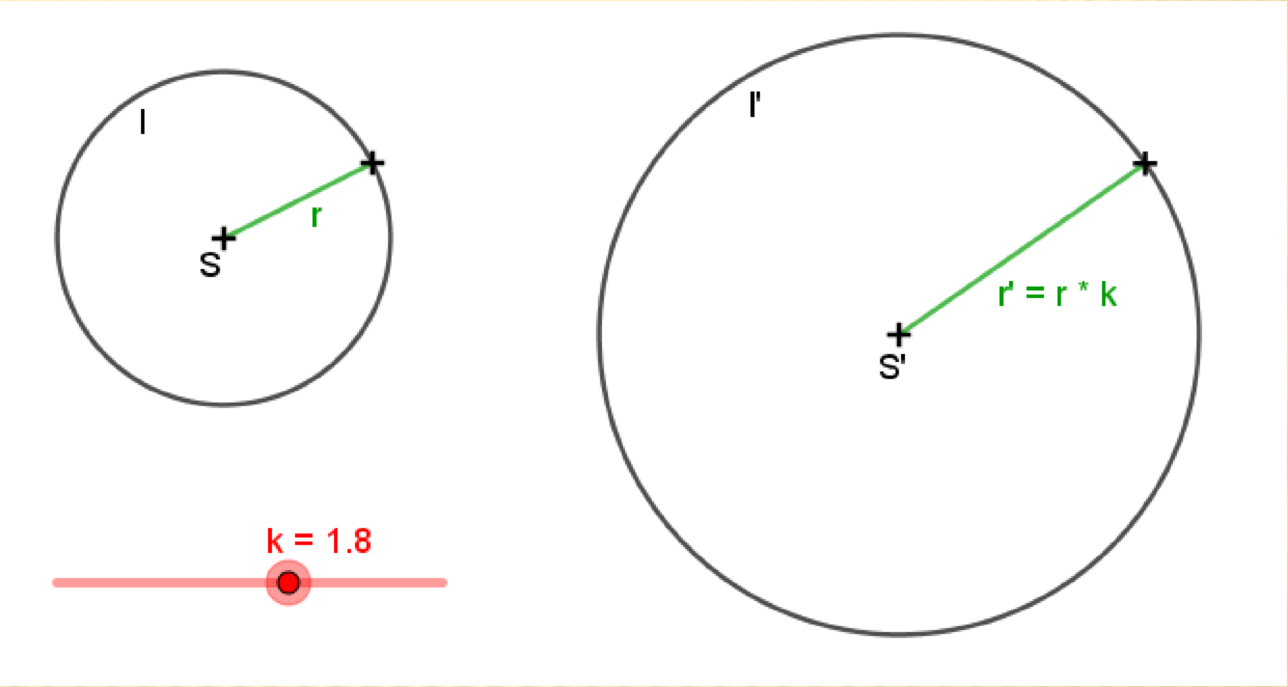
Věta 1.3.1: Dva podobné trojúhelníky *ABC, A´B´C´* určují jednoznačně podobné zobrazení, které zobrazuje body *A, B, C* na body *A´, B´, C´.* Z toho plyne, že podobné zobrazení můžeme určit jednoznačně třemi páry odpovídajících si bodů. Koeficient *k* podobnosti trojúhelníků sestrojených z těchto bodů je **koeficientem podobnosti** tohoto zobrazení.



Poznámka: Podobná zobrazení dělíme na **přímá** a **nepřímá** podle orientace úhlu vzoru a jeho obrazu.



Věta 1.3.2: Obrazem kružnice *l* (*S*, *r*) je kružnice *l* (*S´*, *r´*), kde pro poloměry platí rovnost $r´ = k \cdot r$, $k > 0$, $k \in \mathbf{R}$.



Speciálním příkladem podobnosti je stejnolehlost.

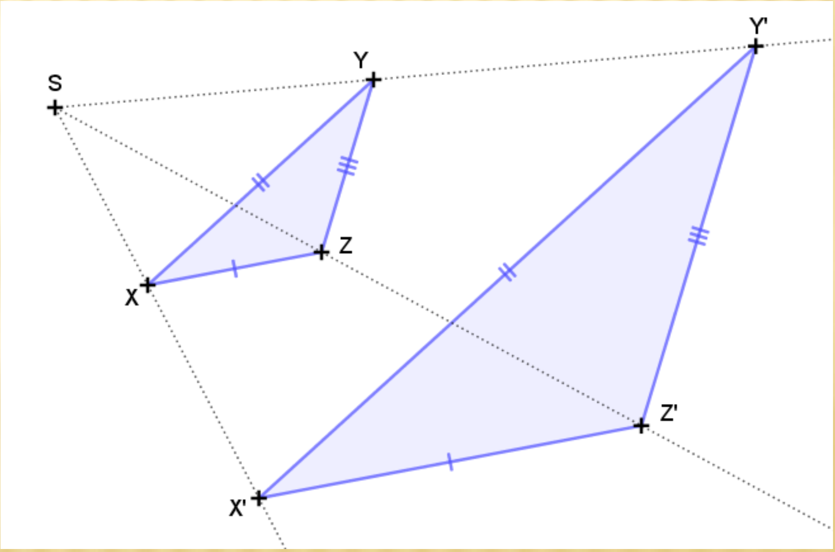
1.3.2 Stejnolehlost

Definice 1.3.3:

Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu *S* přiřazuje týž bod *S* a každému bodu $X \not\equiv S$ přiřazuje bod X' tak, že platí

$$(X'XS) = \frac{|X'S|}{|XS|} = k,$$

kde $k \neq \{0,1\}$ je pevně zvolené reálné číslo, se nazývá **stejnolehlost** (**homotetie**). Bod *S* se nazývá **střed stejnolehlosti**, číslo *k* **koeficient stejnolehlosti**. Značíme *H* (*S, k*).



Stejnolehlost je určena středem S a koeficientem k nebo středem S a jednou uspořádanou dvojicí odpovídajících si bodů X, X' ($X \not\equiv S$, $X' \not\equiv S$), které leží na přímce procházející bodem S.

Poznámka: Stejnolehlost s koeficientem $k = -1$ je **středová souměrnost**.

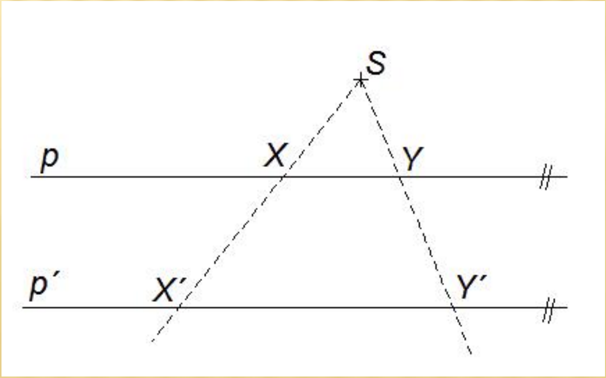
1.3.2.1 Základní vlastnosti stejnolehlosti

- odpovídající si body X, X' leží na přímce procházející středem stejnolehlosti. Pro jejich vzdálenosti od středu stejnolehlosti S platí $|SX'| = |k| \cdot |SX|$.

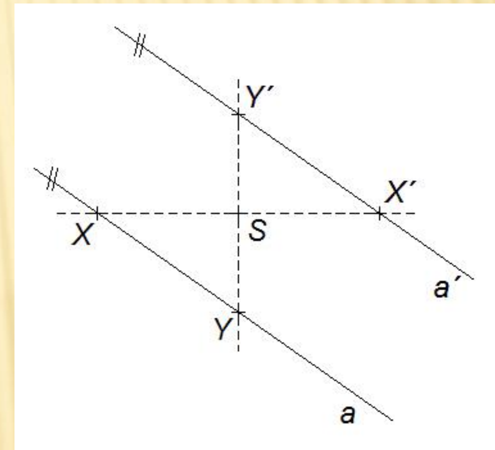
  Je-li $k > 0$, body X, X' leží na téže polopřímce SX (bod S neleží mezi body X, X');

  $k < 0$ opačných polopřímkách s počátečním bodem S (bod S leží mezi body X, X').
- nesamodružné přímce odpovídá přímka s ní rovnoběžná
- stejnolehlé úsečky XY, $X'Y'$ leží na rovnoběžných přímkách a poměr jejich velikostí je roven absolutní hodnotě koeficientu stejnolehlosti, tj.

$$\frac{|X'Y'|}{|XY|} = |k|$$



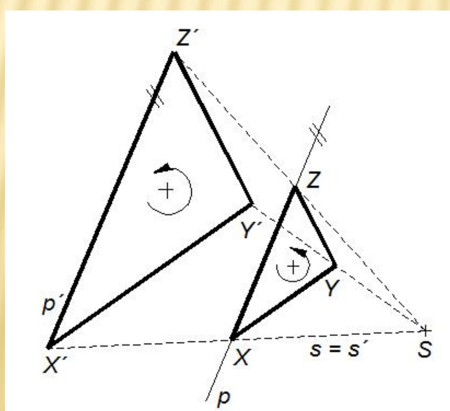
- existuje jediný **samodružný bod** – **střed stejnolehlosti**
- **každá přímka procházející středem stejnolehlosti** je **slabě samodružná**
- **silně samodružné přímky neexistují**

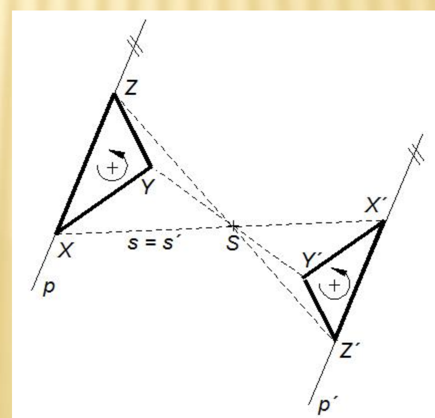


***Věta* 1.3.3:** Inverzním zobrazením ke stejnolehlosti *H* (*S, k*) je stejnolehlost *H* (*S,* 1/*k*), tj. stejnolehlost se stejným středem, ale převráceným koeficientem.

***Věta* 1.3.4:** Úsečce odpovídá úsečka, jejíž délka je rovna délce dané úsečky násobené číslem |*k*|*.* Velikost úhlu je invariantem stejnolehlosti.

***Věta* 1.3.5:** Stejnolehlost převádí každý orientovaný úhel v úhel souhlasně orientovaný.





Věta 1.3.6: Stejnolehlost lze považovat za základní případ podobného zobrazení. Každé podobné zobrazení se dá složit z konečného počtu shodných zobrazení a stejnolehlostí.

Věta 1.3.7: Stejnolehlost s koeficientem k je podobné zobrazení s koeficientem $|k|$.

Poznámka: Stejnolehlost je jediné podobné zobrazení, v němž existuje souvislost mezi vzorem a obrazem.

1.3.2.2 Stejnolehlost kružnic

Věta 1.3.8: Obrazem kružnice $k\ (O, r)$ ve stejnolehlosti $H\ (S, k)$ je kružnice $k'(O', |k| \cdot r)$.

Důkaz:

Popišme kružnici $k\ (O, r)$ množinově, tj. $k = \{X \in E_2 : r = |OX|\}$. Ve stejnolehlosti $H\ (S, k)$ přejde množina k na množinu k' danou předpisem

$$k' = \{X' \in E_2 : |O'X'| = |k| \cdot |OX| = |k| \cdot r = r'\}.$$

Jak vidíme, k' je množina všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu O' stejnou vzdálenost $|k| \cdot r = r'$, tj. množina k' je kružnicí.

Příklad: Jsou dány dvě kružnice $k_1\ (O_1, r_1)$, $k_2\ (O_2, r_2)$, kde $r_1 \neq r_2$, které leží vně sebe. Zjistěte, zda existuje stejnolehlost, která převádí kružnici k_1 do kružnice k_2.

V hledané stejnolehlosti označme střed stejnolehlosti jako bod *S* a koeficient stejnolehlosti jako koeficient *k*. Podle věty 1.3.8 musí platit, že

$$r_2 = |k| \cdot r_1, \text{ tj.}$$

$$|k| = \frac{r_2}{r_1}.$$

Jestliže tedy existuje hledaná stejnolehlost *H* (*S, k*), potom zřejmě platí

$$k = \frac{r_2}{r_1}, \text{ anebo } k = -\frac{r_2}{r_1}.$$

Dále hledejme podmínky pro střed *S*. Střed *S* leží na přímce O_1O_2, přičemž z definice stejnolehlosti (resp. z definice dělicího poměru) plyne, že pro

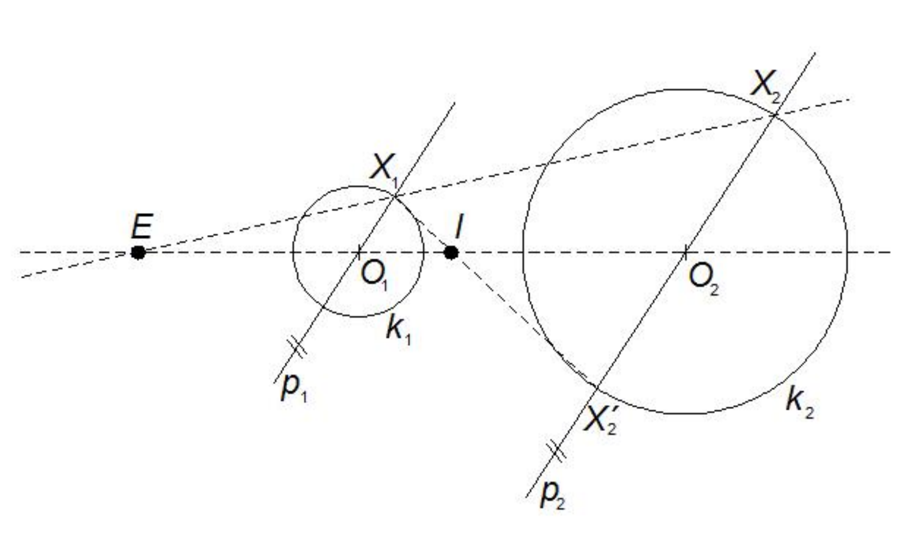
- $k = \frac{r_2}{r_1} > 0$ bod *S* **neleží** mezi body O_1, O_2,
- $k = \frac{r_2}{r_1} < 0$ bod *S* **leží** mezi body O_1, O_2.

První střed stejnolehlosti označme *E*, druhý *I*. Odtud plyne, že existují dvě stejnolehlosti

$$H(E, r_2/r_1) \text{ a } H(I, -r_2/r_1).$$

Bod *E* nazýváme **vnější střed stejnolehlosti** kružnic k_1, k_2.

Bod *I* nazýváme **vnitřní střed stejnolehlosti** kružnic k_1, k_2.



Zbývá jen určit, jak vnější střed E, resp. vnitřní střed I sestrojíme. Na kružnici k_1 zvolme bod X_1. Ve stejnolehlosti H, která převádí kružnici k_1 na kružnici k_2, je obrazem přímky $p_1 = O_1X_1$ rovnoběžka p_2 procházející středem O_2. Obraz X_2 bodu X_1 leží jednak na kružnici k_2, jednak na přímce p_2. Průsečíky přímky p_2 a kružnice k_2 jsou dva – označme je X_2, $X´_2$ (volíme tak, že X_1, X_2 leží v téže polorovině s hraniční přímkou O_1O_2). Průsečík přímky O_1O_2 s přímkou X_1X_2 (resp. s přímkou $X_1X´_2$) je bod E (resp. bod I).

***Věta* 1.3.9:** Každé dvě kružnice jsou stejnolehlé.

Důkaz:

V předcházejícím příkladu jsme ukázali, že věta platí pro dvě kružnice s různými poloměry ležící vně sebe. Našli jsme dvě stejnolehlosti. Jak uvidíme dále, dvě stejnolehlosti nemusí existovat vždy.

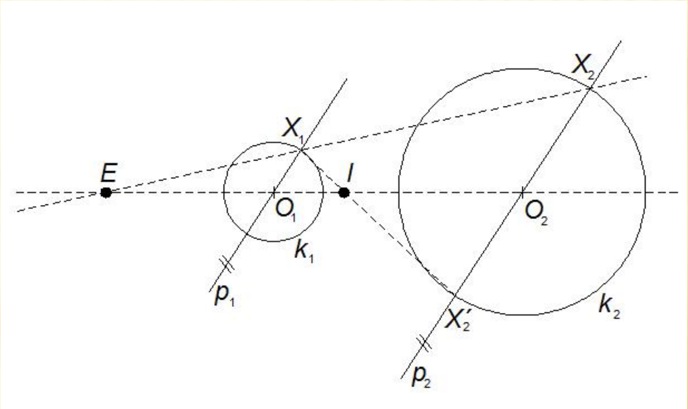
Uvažujme kružnice k_1 (O_1, r_1) , k_2 (O_2, r_2). Pro každý z následujících případů se podaří najít alespoň jednu stejnolehlost:

- jestliže $r_1 \neq r_2$, najdeme vždy právě dvě stejnolehlosti H (E, r_2/r_1) a H (I, $-r_2/r_1$)
- jestliže $r_1 = r_2$, najdeme vždy pouze jednu stejnolehlost a to H (I, $-r_2/r_1$) = = H (I, -1), tj. středovou souměrnost $S(I)$

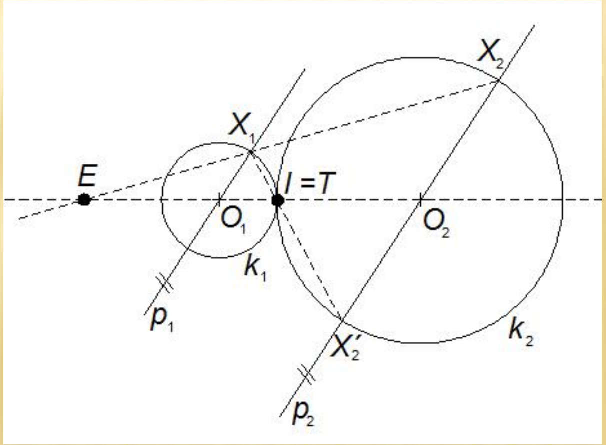
1. Dané dvě kružnice k_1 (O_1, r_1) , k_2 (O_2, r_2) jsou **nesoustředné kružnice**, tj. $O_1 \neq O_2$, a mají

A) **různé poloměry**, tj. $r_1 \neq r_2$, pak zaujímají jednu z následujících čtyř poloh

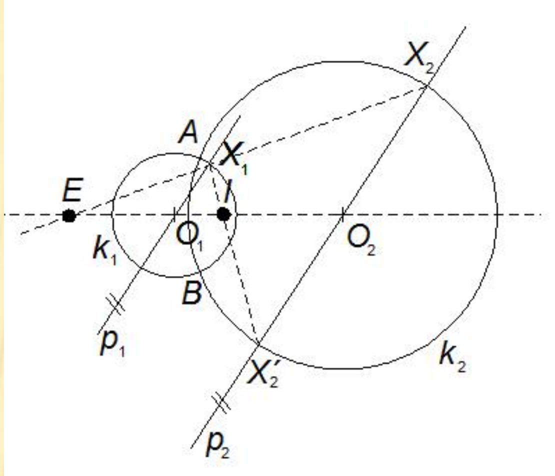
a1) **leží vně sebe**



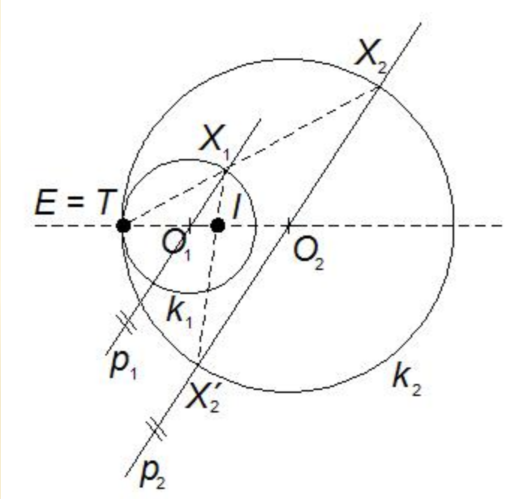
a2) **mají vnější dotyk**



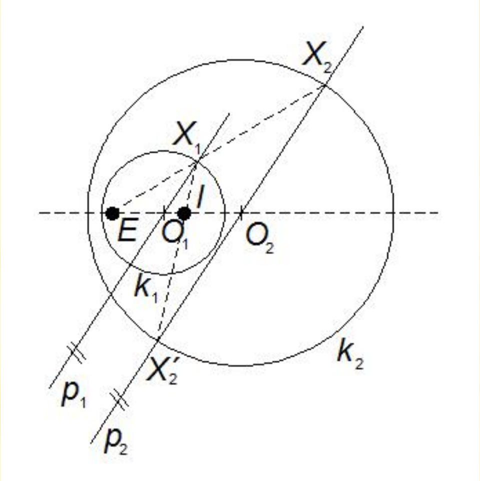
a3) **protínají se ve dvou bodech**



a4) **mají vnitřní dotyk**

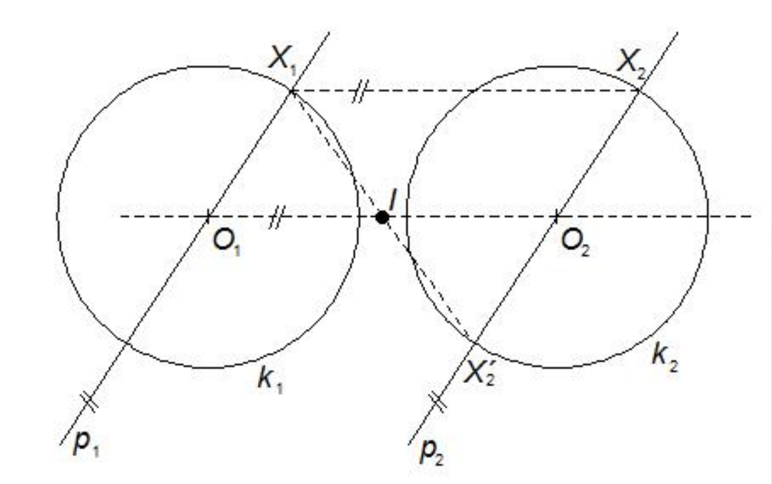


a5) **jedna se nachází uvnitř druhé a nemají žádný bod dotyku**

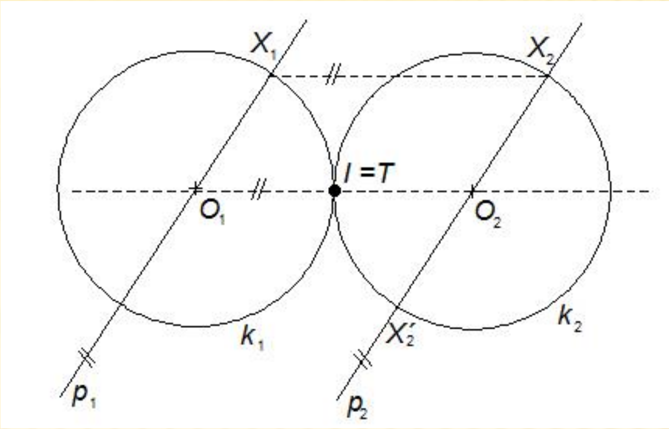


B) **stejné poloměry**, tj. $r_1 = r_2$, pak zaujímají jednu z následujících třech poloh

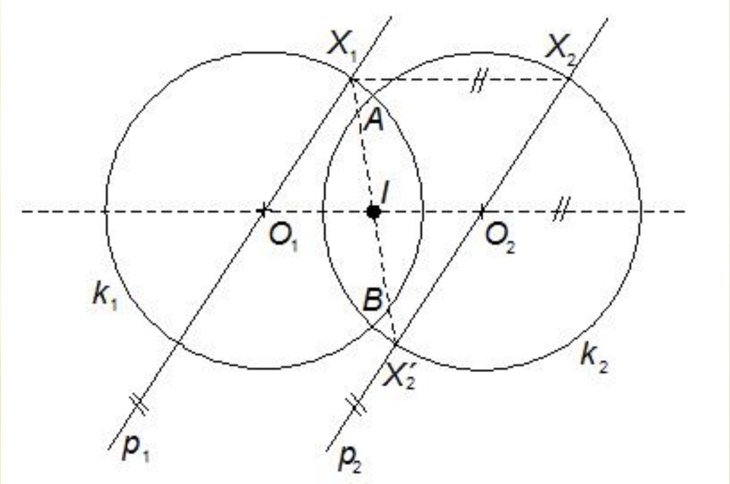
b1) **leží vně sebe**



b2) **mají vnější dotyk**

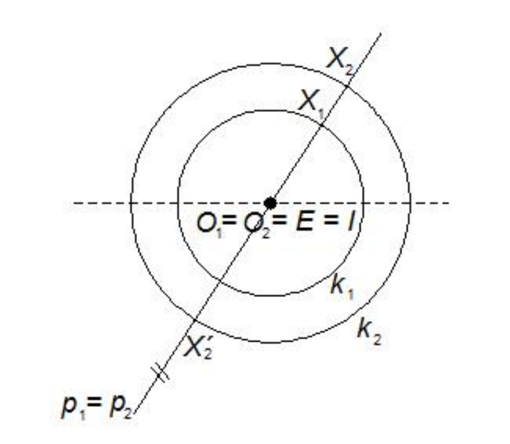


b3) **protínají se ve dvou bodech**

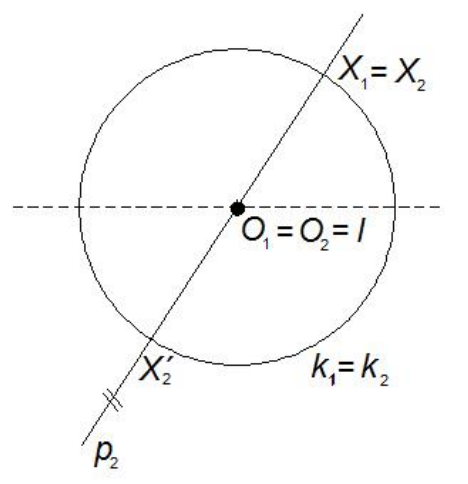


2. Dané dvě kružnice k_1 (O_1, r_1) , k_2 (O_2, r_2) jsou **soustředné kružnice**, tj. $O_1 = O_2$, a mají

A) **různé poloměry**, tj. $r_1 \neq r_2$



B) **stejné poloměry**, tj. $r_1 = r_2$



Z předcházejících obrázků ihned vidíme, že platí:

Věta 1.3.10: Dotýkají-li se dvě kružnice, potom bod dotyku je jedním ze středů stejnolehlosti (v případě vnějšího dotyku vnitřním středem, v případě vnitřního dotyku vnějším středem).

Poznámka: Středy stejnolehlosti lze úspěšně využít při konstrukci společných tečen dvou kružnic.

Věta 1.3.11: Jsou-li dány dvě nesoustředné kružnice *k, k´* (*O* ≠ *O´*) a přímka *t*, která je tečnou kružnice *k* a současně prochází jedním ze středů stejnolehlosti, potom je přímka *t* i tečnou kružnice *k´.*

Věta 1.3.12: Společná tečna dvou nesoustředných kružnic *k* (*O, r*) , *k´* (*O´, r´*) prochází některým ze středů stejnolehlosti kružnic *k, k´* nebo je rovnoběžná s přímkou *OO´*.

Leží-li vnější (popř. vnitřní) střed stejnolehlosti vně, resp. na , resp . uvnitř kružnice *k* (a tím i *k´*), lze jím vést dvě tečny, resp. jednu tečnu, resp. žádnou tečnu. Celkový počet tečen tak může být 4, 3, 2, 1 nebo 0 – lze specifikovat na základě obrázků u důkazu věty 4.3.9.