5. MNOŽINY BODŮ DANÝCH VLASTNOSTÍ

5.1 Základní definice

Definice 5.1:

Množina všech bodů dané vlastnosti *V* je množina *M* všech bodů základní množiny, které splňují tyto požadavky:

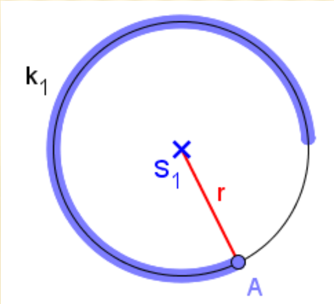
1. každý bod množiny *M* má danou vlastnost *V*,
2. každý bod základní množiny, který má danou vlastnost *V*, patří do množiny *M*.

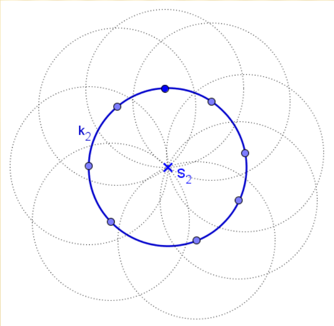
Jinými slovy řečeno, každý bod $A \in M$ má tuto vlastnost *V* a žádný bod $B \notin M$ tuto vlastnost nemá.

5. 2 Příklady nejčastějších množin daných vlastností v rovině

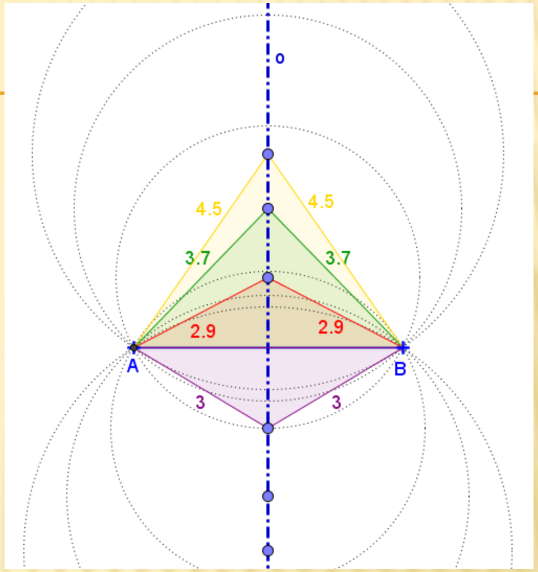
5.2.1 Kružnice *k* (*S, r*)

- množina bodů, které mají od bodu *S* stejnou vzdálenost *r*
- množina středů *O* všech kružnic o poloměru *r,* které procházejí bodem *S*





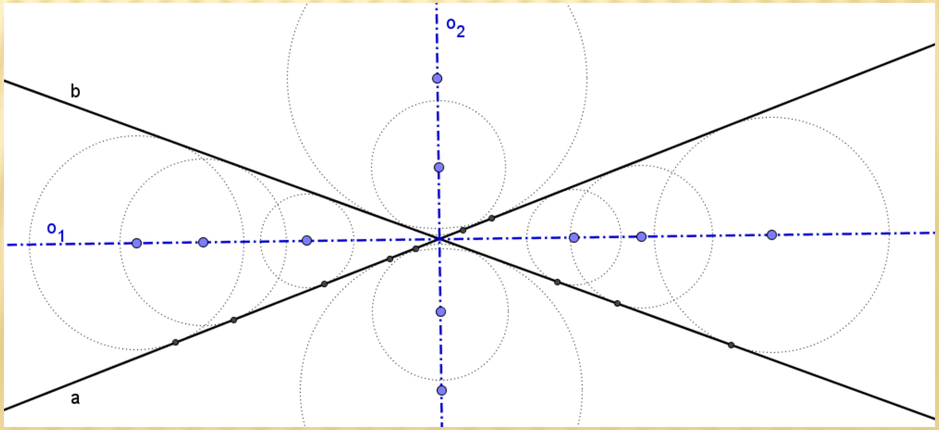
5.2.2 Osa úsečky *AB*



- množina bodů *M*, které mají stejnou vzdálenost od bodů *A, B*
- množina středů *O* všech kružnic, které procházejí body *A, B*
- množina vrcholů *V* všech rovnoramenných trojúhelníků *ABV* se základnou *AB*

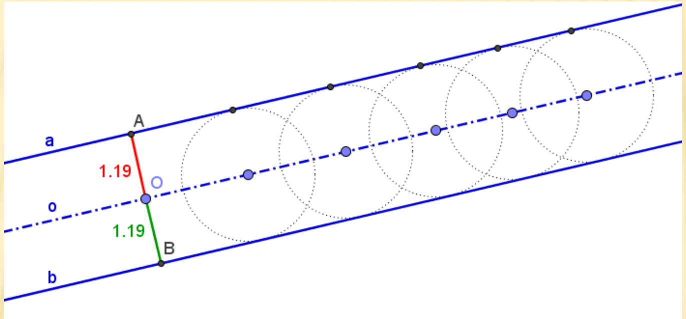
5.2.3 Množina *M* bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžek *a, b*

- osy úhlů sevřených danými přímkami *a, b*
- množina středů *O* všech kružnic, které se dotýkají přímek *a, b*



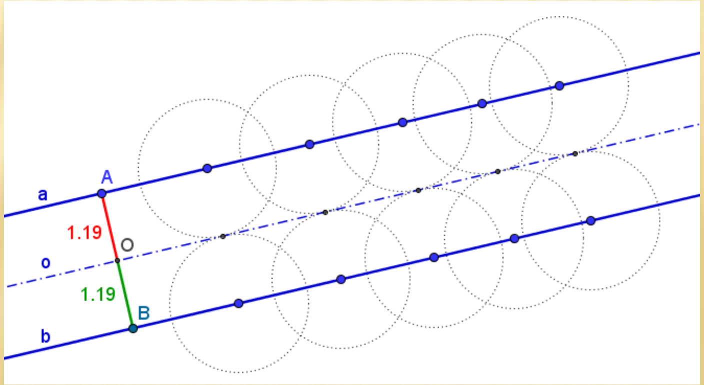
5.2.4 Množina *M* bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou rovnoběžek *a, b*

- osa *o* pásu mezi přímkami *a, b*
- množina středů *O* všech kružnic, které se dotýkají přímek *a, b*



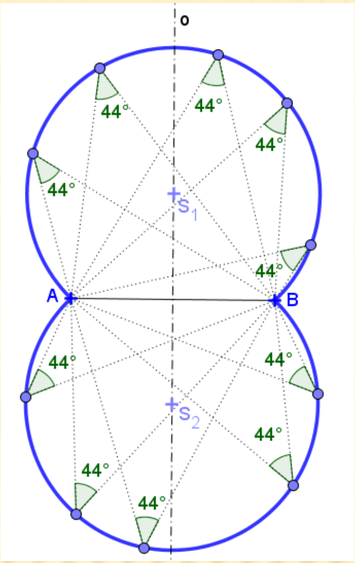
5.2.5 Rovnoběžky *a, b*

- množina středů kružnic s tečnou *o* (osa pásu) o poloměrech $r = v(o, a) = v(o, b)$
- množina všech bodů, které mají od dané přímky *o* stejnou vzdálenost



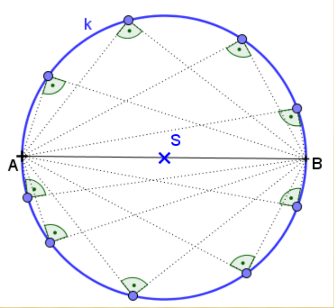
5.2.6 Množina vrcholů *V* konvexních úhlů *AVB* velikosti φ

- dvojice shodných kruhových oblouků se společnou tětivou *AB* a obvodovým úhlem φ nad touto tětivou



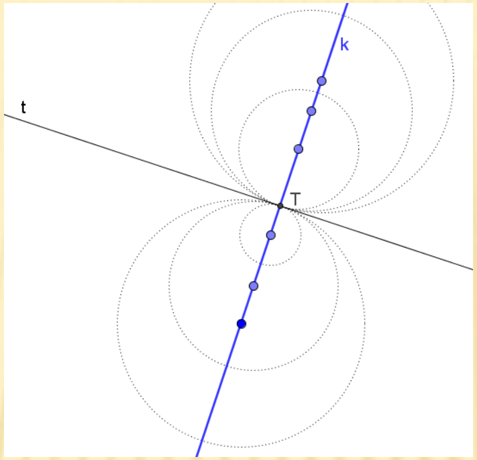
5.2.7 Množina vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí danými body *A, B*, je kružnice nad průměrem *AB* s výjimkou bodů *A, B*

- Thaletova kružnice



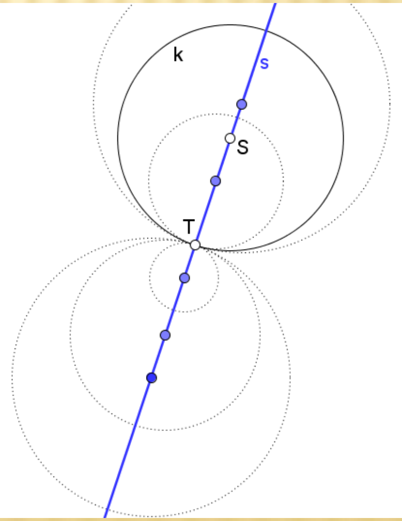
5.2.8 Množina středů *O* kružnic, které se přímky *t* dotýkají v bodě $T \in t$

- přímka *k* vedená bodem *T* kolmo k přímce *t*, s výjimkou bodu *T*



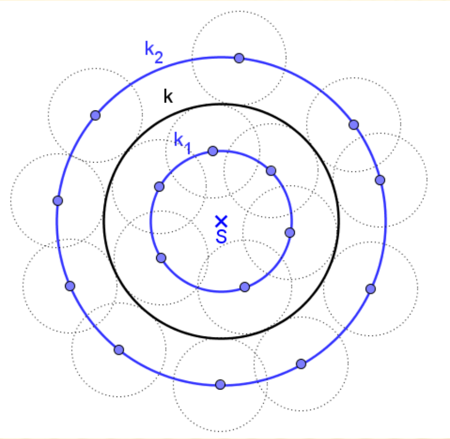
5.2.9 Množina středů kružnic, které se kružnice *k* (*S*, *r*) dotýkají v bodě $T \in k$

- přímka $s \equiv TS$ s výjimkou bodů *T*, *S*



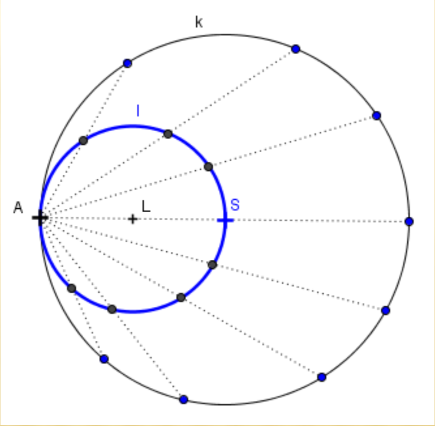
5.2.10 Množina středů kružnic *k´* (*S´*, *r´*), které se dotýkají kružnice *k* (*S*, *r*)

- kružnice se středem *S* a s poloměry $r_1 = |r - r´|$, $r_2 = r + r´$



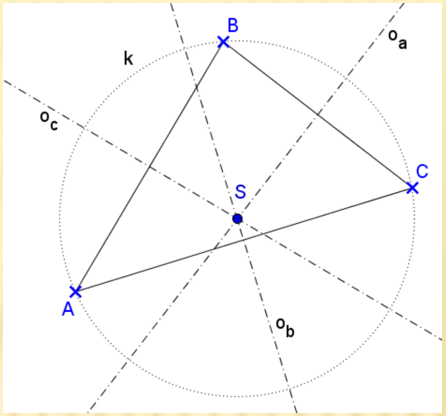
5.2.11 Množina středů všech tětiv *AX* kružnice *k* (*S*, *r*)

- kružnice *l* nad průměrem *AS*, s výjimkou bodu *A*



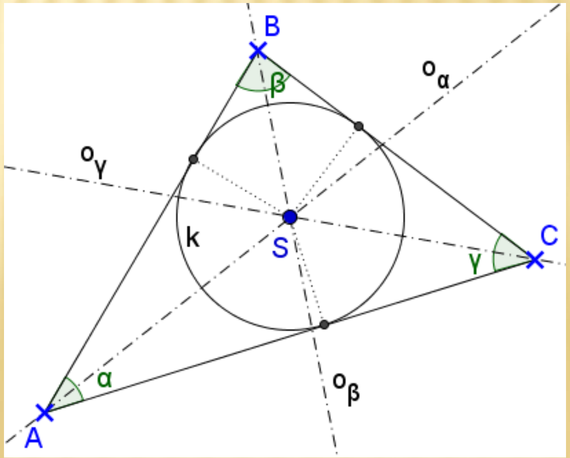
5.2.12 Množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od třech nekolineárních bodů *A, B, C*

- střed kružnice opsané trojúhelníku *ABC* (jednoprvková množina)



5.2.13 Množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od tří stran trojúhelníku *ABC*

- střed kružnice trojúhelníku vepsané (jednoprvková množina)



5.2.14 Elipsa

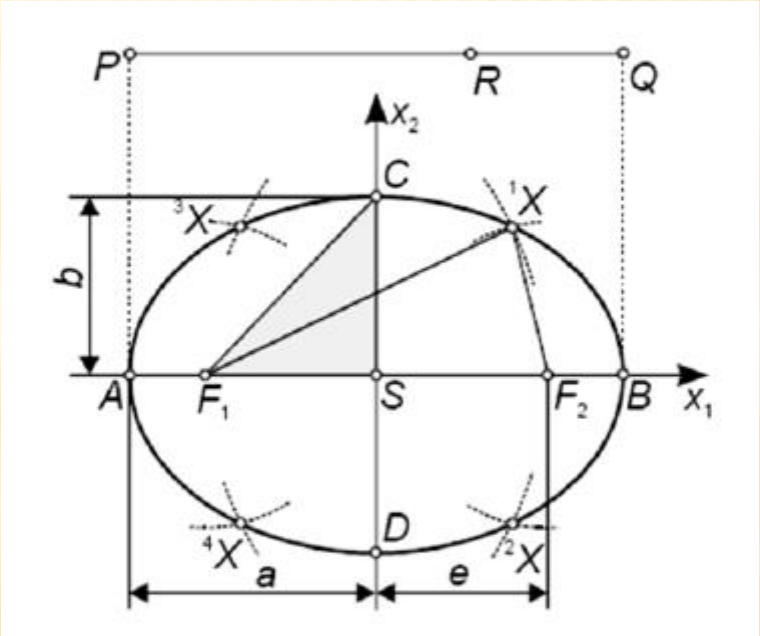
Množinu všech bodů v rovině E_2, které mají od dvou různých pevně zvolených bodů F_1, F_2 konstantní součet vzdáleností rovný $2a$, nazýváme **elipsa**. Tj. platí

$$k_e = \{X \in E_2\text{: } |XF_1| + |XF_2| = 2a = \text{konst.},\ 0 < |F_1F_2| < 2a\}.$$

Dané pevné body F_1, F_2 se nazývají **ohniska**, spojnicím XF_1, XF_2 říkáme **průvodiče**. Střed S úsečky F_1F_2 je tzv. **střed** elipsy. Vzdálenost ohnisek od středu se nazývá **lineární výstřednost** (**excentricita**) a označuje se $e = |SF_1| = |SF_2|$.

Bodová konstrukce elipsy:

Úsečku PQ o délce $2a$ rozdělíme libovolným bodem R na dvě části s délkami $r_1 = |PR|$ a $r_2 = |RQ|$ (tj. $r_1 + r_2 = 2a$) a sestrojíme dvě dvojice kružnic, tj. $k_1\,(F_1, r_1)$, $k_2\,(F_2, r_2)$ a $k'_1\,(F_1, r_2)$, $k'_2\,(F_2, r_1)$. Je zřejmé, že kružnice k_1, k_2 (resp. k'_1, k'_2) se protínají v bodech elipsy. Tj. $k_1 \cap k_2 = \{{}^1X, {}^2X\}$, $k'_1 \cap k'_2 = \{{}^3X, {}^4X\}$. Různou volbou bodu R získáváme různé poloměry kružnic a tím i různé body elipsy.



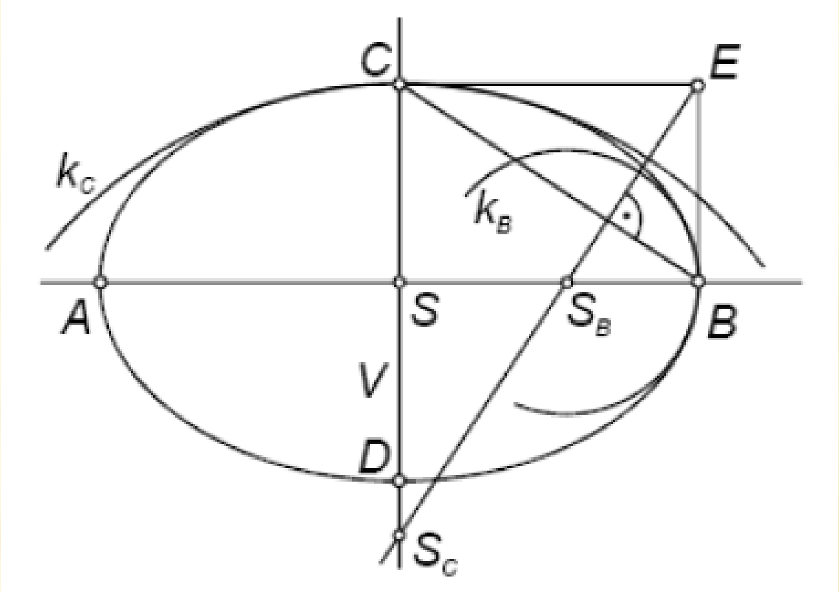
Konstrukce elipsy pomocí oskulačních kružnic

Při praktickém sestrojování elipsy, nahrazujeme elipsu v okolí jejích hlavních, resp. vedlejších vrcholů tzv. oskulačními, resp. hyperoskulačními kružnicemi, tj. kružnicemi, které se ve vrcholech elipse co nejvíce přibližují. Každá kružnice, která se dotýká elipsy např. ve vrcholu *B*, ji přibližně v blízkém okolí tohoto vrcholu nahrazuje.

Princip konstrukce oskulačních kružnic k_A, k_B **a hyperoskulačních kružnic** k_C, k_D v hlavních a vedlejších vrcholech elipsy:

Nechť *E* je průsečík tečen elipsy ve vrcholech *B* a *C*. Kolmice z bodu *E* na přímku *BC* protne hlavní (resp. vedlejší) osu ve středu S_B (resp. S_C) oskulační kružnice v hlavním vrcholu *B* (resp. hyperoskulační kružnice ve vedlejším vrcholu *C*). Oskulační kružnice v hlavním vrcholu *B* je kružnice k_B (S_B, $r_B = |S_B B|$), obdobně hyperoskulační kružnice ve vedlejším vrcholu *C* je kružnice k_C (S_C, $r_C = |S_C C|$).

Oskulační kružnice k_A je souměrně sdružená s oskulační kružnicí k_B podle středu elipsy *S*, resp. hyperoskulační kružnice k_D je souměrně sdružená s hyperoskulační kružnicí k_C podle středu elipsy *S.*



Poznámka: Při praktické konstrukci elipsy narýsujeme nejprve v okolí hlavních vrcholů elipsy oblouky oskulačních kružnic a v okolí vedlejších vrcholů oblouky hyperoskulačních kružnic. Dále např. pomocí bodové konstrukce najdeme několik dalších bodů elipsy a pak dokreslíme (např. s využitím křivítka) oblouky elipsy procházející sestrojenými body a dotýkající se oblouku oskulačních kružnic.