10. BINÁRNÍ OPERACE V GEOMETRII

10.1 Binární operace

Definice 10.1:
Zobrazení kartézského součinu *M* x *M* do množiny *M* nazýváme **binární operace** na množině *M*.

Vlastnosti binárních operací:

- **úplnost** (neomezená proveditelnost)
- **asociativita** - vlastnost binární operace říkající, že nezáleží na tom, v jakém pořadí operace provádíme, pokud se jich vedle sebe vyskytne více
- **komutativnost** - vlastnost binární operace říkající, že u ní nezávisí na pořadí jejích operandů
- **existence neutrálního prvku** – v geometrii se pro neutrální prvek používá slovo *identita*
- **existence inverzního prvku**
- **distributivnost** – chování binární operace vůči jiné binární operaci; říkáme, že můžeme jednu operaci distribuovat přes jinou operaci

Algebraická struktura

Uspořádaná dvojice (*M*, ◦), kde *M* je množina a ◦ je operace definovaná v množině *M*, se nazývá **algebraická struktura**.

Typy algebraických struktur s jednou operací:

- **pologrupa** - algebraická struktura s jednou asociativní binární operací; je to tedy ***grupoid***, jehož operace je asociativní
  - **komutativní pologrupa** – binární operace splňuje kromě asociativní vlastnosti také komutativní vlastnost
- **monoid** – pologrupa s neutrálním prvkem
- **grupa** – monoid rozšířený o inverzní operaci

Typy algebraických struktur se dvěma operacemi:

- polookruh
- okruh
- těleso

10.2 Aritmetické operace s geometrickými útvary

10.2.1 Operace sčítání úseček

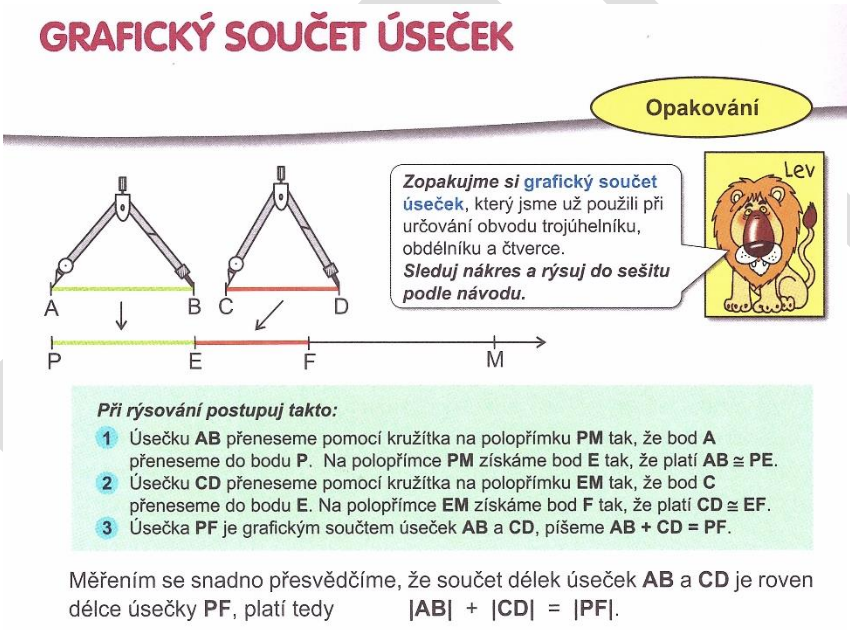
Na základní škole se provádí grafické sčítání úseček jejich přenesením na polopřímku tak, aby sčítané úsečky měly společné pouze své krajní body a aby součet úseček byl jejich sjednocením.

Sjednocení geometrických útvarů

Při sjednocení geometrických útvarů jsou průnikem geometrických útvarů pouze hraniční body. Sčítání úseček je tedy odlišné od sčítání čísel v aritmetice, kde se sčítání čísel provádí pomocí sjednocení, v němž je průnik prázdný.

Grafický součet úseček *AB* a *CD*:

Na polopřímku *PM* přeneseme úsečku *AB* tak, že bod *A* přeneseme do bodu *P* a bod *E* na polopřímce *PM* získáme tak, že platí $AB \cong PE$. Dále na polopřímku *EM* přeneseme úsečku *CD* tak, že bod *C* přeneseme do bodu *E* a bod *F* sestrojíme na polopřímce *EM* takovým způsobem, aby $CD \cong EF$. Úsečka *PF* se nazývá **grafický součet úseček *AB* a *CD*.** Grafický součet úseček symbolicky zapisujeme $AB + CD = PF$.



Platí:

- úsečka *AB* je reprezentantem třídy T_{AB}, do které patří i úsečka *PE*
- úsečka *CD* je reprezentantem třídy T_{CD}, do které patří i úsečka *EF*
- $T_{AB} + T_{CD} = T_{PF}$ s reprezentantem *PF* právě tehdy, když $PE \cup EF = PF$ a bod *E* leží mezi body *P* a *F* a je jediným prvkem průniku úseček *PE* a *EF*
- zapsáno symbolicky: $AB \in T_{AB} \wedge PE \in T_{AB} \wedge CD \in T_{CD} \wedge EF \in T_{CD}$, pak $T_{AB} + T_{CD} = T_{PF} = T_{AB+CD}$

Vlastnosti operace sčítání tříd shodných úseček

Operace sčítání tříd shodných úseček je:

- **úplná**
- **asociativní**
- **komutativní**

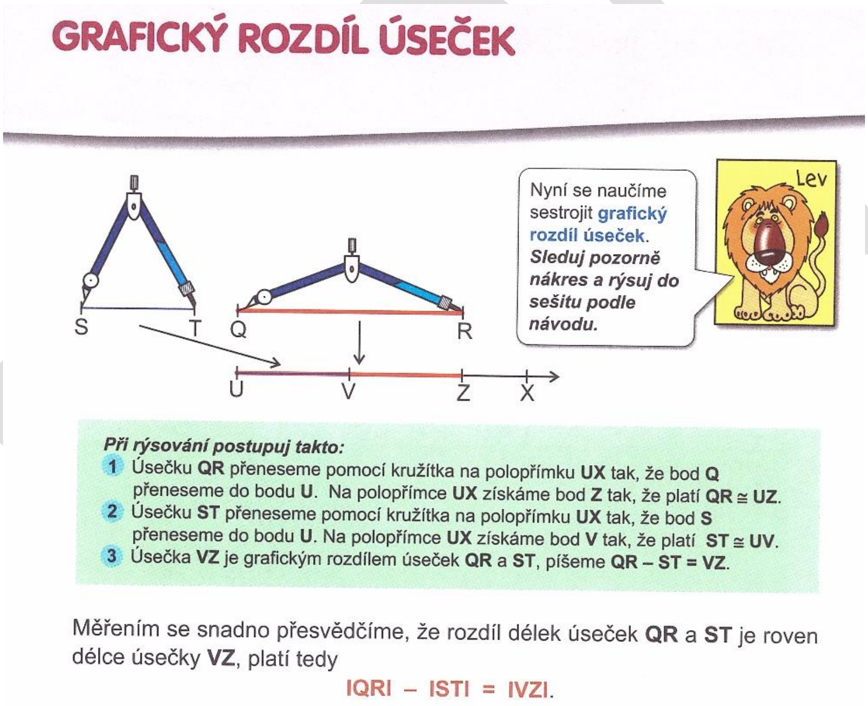
Z čehož plyne, že operace sčítání shodných úseček tvoří v množině tříd shodných úseček **komutativní pologrupu**.

10.2.2 Operace odčítání úseček

Operace odčítání v množině tříd shodných úseček je inverzní operací k operaci sčítání v množině tříd shodných úseček. Není to úplná operace, ale ve škole se používá.

Grafický rozdíl úseček *QR* a *ST* (*QR* > *ST*):

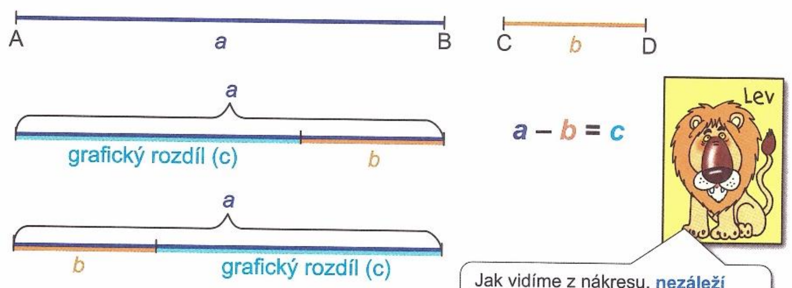
Na polopřímku *UX* přeneseme úsečku *QR* tak, že bod *Q* přeneseme do bodu *U* a bod *Z* na polopřímce *UX* získáme tak, že platí *QR* ≅ *UX*. Dále na polopřímku *UX* přeneseme úsečku *ST* tak, že bod *S* přeneseme do bodu *U* a bod *V* sestrojíme na polopřímce *UX* takovým způsobem, aby *ST* ≅ *UV*. Úsečka *VZ* se nazývá **grafický rozdíl úseček *QR* a *ST*.** Grafický rozdíl úseček *QR* a *ST* symbolicky zapisujeme *QR* – *ST* = *VZ*.



Vlastnosti operace odčítání tříd shodných úseček

Operace odčítání tříd shodných úseček:

- **není úplná**
  - není možné odčítat delší úsečku od kratší úsečky, neboť výsledkem by byla úsečka o „záporné délce", ale žádná taková úsečka neexistuje!
- **není komutativní** – v důsledku výše uvedeného nemá operace odčítání tříd shodných úseček komutativní vlastnost
  - tj. je-li *AB* > *CD*, je možné určit rozdíl úseček *AB* – *CD*, ale **nelze** určit rozdíl úseček *CD* – *AB*!
- **je asociativní**



2. Sestroj grafický rozdíl úseček ***a* = AB** a ***b* = CD**. Záleží na tom, zda úsečku **CD**, kterou budeme odčítat, přenášíme k bodu **A**, nebo k bodu **B** úsečky **AB**? Pozoruj nákres:

3. Sestroj grafický rozdíl úseček **MN** a **OP**. **|MN|** = 8 cm, **|OP|** = 4 cm.

- **je inverzní operace k operaci sčítání tříd shodných úseček**
  - Je-li úsečka *PF* součtem úseček *AB* a *CD*, pak úsečka *AB* je rozdílem úseček *PF* a *CD*.

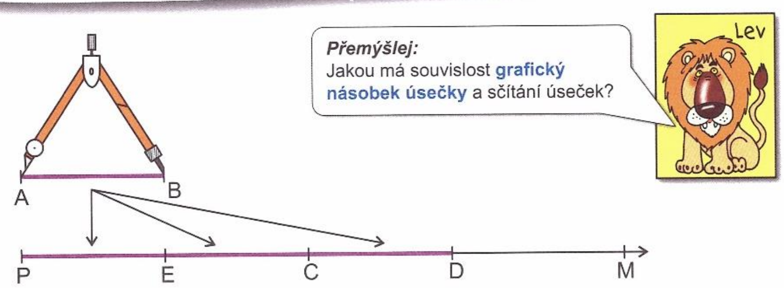
10.2.3 Operace (přirozený) násobek úsečky

Operace (přirozený) ***n*-tý násobek úsečky**, kde $n \in \mathbf{N}$, je opakovaný součet *n* shodných úseček.

Grafický trojnásobek úsečky *AB*:

Na polopřímku *PM* přeneseme úsečku *AB* tak, že bod *A* ztotožníme s bodem *P* a bod *E* na polopřímce *PM* získáme tak, že platí $AB \cong PE$. Dále na polopřímku *EM* přeneseme znovu úsečku *AB* tak, že bod *A* přeneseme do bodu *E* a bod *C* sestrojíme na polopřímce *EM* takovým způsobem, aby $AB \cong EC$. Nakonec na polopřímku *CM* přeneseme opět úsečku *AB* a to tak, že bod *A* přeneseme do bodu *C* a bod *D* sestrojíme na polopřímce *CM* takovým způsobem, aby $AB \cong CD$. Úsečka *PD* se nazývá **grafický trojnásobek úsečky *AB*.** Grafický trojnásobek úsečky *AB* symbolicky zapisujeme $3 \cdot AB = PD$.

GRAFICKÝ NÁSOBEK ÚSEČKY



Při rýsování postupuj takto:

1. Úsečku **AB** přeneseme pomocí kružítka na polopřímku **PM** tak, že bod **A** přeneseme do bodu **P**. Na polopřímce **PM** získáme bod **E** tak, že platí **AB ≅ PE**.
2. Úsečku **AB** přeneseme pomocí kružítka na polopřímku **EM** tak, že bod **A** přeneseme do bodu **E**. Na polopřímce **EM** získáme bod **C** tak, že platí **EC ≅ AB**.
3. Úsečku **AB** přeneseme pomocí kružítka na polopřímku **CM** tak, že bod **A** přeneseme do bodu **C**. Na polopřímce **CM** získáme bod **D** tak, že platí **CD ≅ AB**.
4. Pokračujeme tolikrát, kolikrát chceme úsečku násobit.
5. Úsečka **PD** je grafickým trojnásobkem úseček **AB**, píšeme **3 · AB = PD**.

Měřením se snadno přesvědčíme, že násobek délek úseček **AB** je roven délce úsečky **PD**, platí tedy

$$3 \cdot |AB| = |PD|.$$

Vlastnosti operace přirozeného násobku tříd shodných úseček:

Operace přirozeného násobku tříd shodných úseček je:

- **úplná**
- **asociativní**
- **komutativní**
- **distributivní**
  - např. $2 \cdot (AB + CD) = 2 \cdot AB + 2 \cdot CD$

10.2.4 Operace sčítání (konvexních) úhlů

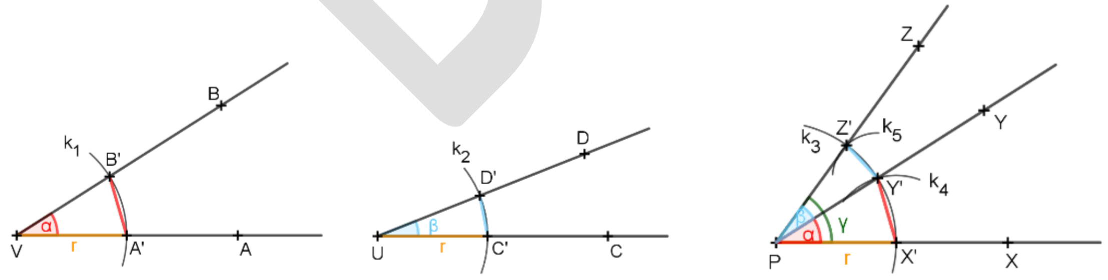
Ve škole se provádí grafické sčítání úhlů jejich přenesením k polopřímce tak, aby sčítané úhly měly společné pouze jedno rameno (tj. aby jedno rameno prvního sčítaného úhlu splývalo s danou polopřímkou a aby jedno rameno druhého sčítaného úhlu splývalo s druhým ramenem prvního sčítaného úhlu) a aby vrcholy obou sčítaných úhlů splývaly, pak součet úhlů je sjednocením sčítaných úhlů.

Sjednocení konvexních úhlů

Při sjednocení geometrických útvarů jsou průnikem geometrických útvarů pouze hraniční body, v případě sčítání konvexních úhlů se jedná o styčné rameno. Což je odlišnost od sčítání čísel v aritmetice, kde se sčítání provádí pomocí sjednocení, v němž je průnik prázdný!

Grafický součet konvexních úhlů $\alpha = \angle AVB$ a $\beta = \angle CUD$

K polopřímce *PX* přeneseme úhel $\alpha = \angle AVB$ tak, že úhel α je shodný s úhlem *XPY*, dále k polopřímce *PY* přeneseme ve stejném smyslu úhel $\beta = \angle CUD$ tak, aby byl úhel β shodný s úhlem *YPZ*. Úhel $\gamma = \angle XPZ$ se nazývá **grafický součet úhlů α a β**. Grafický součet úhlů $\alpha = \angle AVB$ a $\beta = \angle CUD$ symbolicky zapisujeme $\gamma = \alpha + \beta = \angle AVB + \angle CUD = \angle XPZ$.



Platí:

- konvexní úhel $\alpha = \angle AVB$ je reprezentantem třídy $\mathbf{T}_{\angle AVB}$, do které patří i konvexní úhel $\angle XPY$
- konvexní úhel $\beta = \angle CUD$ je reprezentantem třídy $\mathbf{T}_{\angle CUD}$, do které patří i konvexní úhel $\angle YPZ$

- $\mathbf{T}_{\angle AVB} + \mathbf{T}_{\angle CUD} = \mathbf{T}_{\angle XPZ}$ s reprezentantem $\angle XPZ$ právě tehdy, když $\angle XPY \cup \angle YPZ = \angle XPZ$ a polopřímka PY je vnitřní polopřímkou úhlu $\angle XPZ$ a je jediným prvkem průniku konvexních úhlů $\angle XPY$, $\angle YPZ$.
- zapsáno symbolicky: $\alpha = \angle AVB \in \boldsymbol{T}_{\angle AVB} \wedge \angle XPY \in \boldsymbol{T}_{\angle AVB} \wedge \beta = \angle CUD \in \boldsymbol{T}_{\angle CUD} \wedge \wedge \angle YPZ \in \boldsymbol{T}_{\angle CUD}$, pak $\boldsymbol{T}_{\angle AVB} + \boldsymbol{T}_{\angle CUD} = \boldsymbol{T}_{\angle XPZ} = \boldsymbol{T}_{\angle AVB + \angle CUD}$.

Vlastnosti operace sčítání konvexních úhlů:

- **neúplná**
- **komutativní**
- **asociativní** (pokud se výsledek operace vejde do 360°)
- nutná podmínka – existence polopřímky

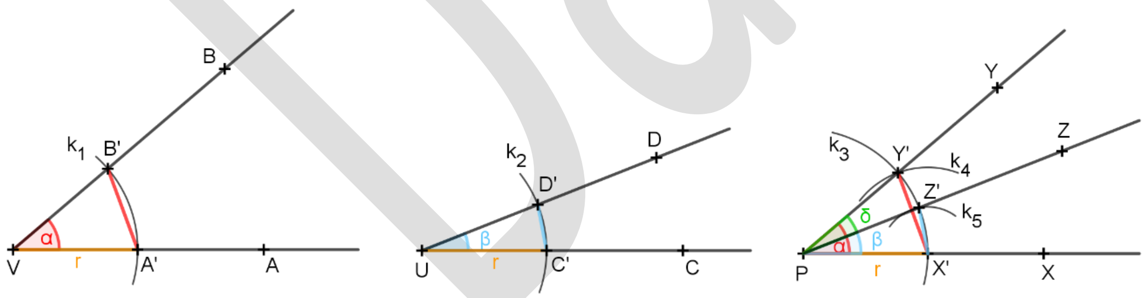
Z čehož plyne, že operace sčítání shodných konvexních úhlů tvoří v množině tříd shodných konvexních úhlů **komutativní pologrupu**.

10.2.5 Operace odčítání (konvexních) úhlů

Operace odčítání v množině tříd shodných konvexních úhlů je inverzní operací k operaci sčítání v množině tříd shodných konvexních úhlů. Není to úplná operace, ale ve škole se používá.

Grafický rozdíl konvexních úhlů $\alpha = \angle AVB$ a $\beta = \angle CUD$, kde $\alpha > \beta$

K polopřímce PX přeneseme úhel $\alpha = \angle AVB$ tak, že úhel α je shodný s úhlem XPY, dále k polopřímce PX přeneseme ve stejném smyslu úhel $\beta = \angle CUD$ tak, aby byl úhel β shodný s úhlem XPZ. Úhel $\gamma = \angle ZPY$ se nazývá **grafický rozdíl úhlů α a β**. Grafický rozdíl úhlů $\alpha = \angle AVB$ a $\beta = \angle CUD$ symbolicky zapisujeme $\delta = \alpha - \beta = \angle AVB - \angle CUD = \angle ZPY$.



Vlastnosti operace odčítání tříd shodných konvexních úhlů

Operace odčítání tříd shodných konvexních úhlů:

- **není úplná**
  - není možné odčítat větší (konvexní) úhel od menšího (konvexního) úhlu, neboť výsledkem by byl úhel o „záporné velikosti“, ale žádný takový úhel neexistuje!
- **není komutativní** – v důsledku výše uvedeného nemá operace odčítání tříd shodných (konvexních) úhlů komutativní vlastnost
  - tj. je-li $\alpha > \beta$, je možné určit rozdíl (konvexních) úhlů $\alpha - \beta$, ale **nelze** určit rozdíl (konvexních) úhlů $\beta - \alpha$!

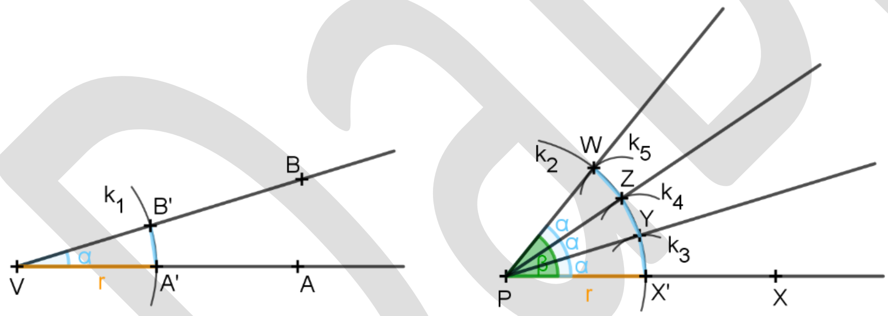
- **je asociativní**
  - nezáleží na tom, zda přenášíme odečítaný úhel $\beta = \angle CUD$ k jednomu rameni úhlu $\alpha = \angle AVB$, kde $\alpha > \beta$, v jednom smyslu či k druhému rameni úhlu $\alpha = \angle AVB$ v opačném smyslu
- **je inverzní operace k operaci sčítání tříd shodných (konvexních) úhlů**
  - Je-li (konvexní) úhel $\angle AVB$ součtem konvexních úhlů $\angle ZPY$ a $\angle CUD$, pak (konvexní) úhel $\angle ZPY$ je rozdílem (konvexních) úhlů $\angle AVB$ a $\angle CUD$.

10.2.6 Operace (přirozený) násobek úhlu

Operace (přirozený) ***n*-tý násobek úhlu**, kde $n \in \mathbf{N}$, je opakovaný součet n shodných úhlů. Pro grafické řešení je omezující hodnotou plný úhel (360°).

Grafický trojnásobek úhlu $\alpha = \angle AVB$:

K polopřímce PX přeneseme úhel $\alpha = \angle AVB$ tak, že úhel α je shodný s úhlem $\angle XPY$, dále k polopřímce PY přeneseme ve stejném smyslu znovu úhel $\alpha = \angle AVB$ tak, že úhel α je shodný s úhlem $\angle YPZ$. A nakonec k polopřímce PZ přeneseme ve stejném smyslu znovu úhel $\alpha = \angle AVB$ tak, že úhel α je shodný s úhlem $\angle ZPW$. Úhel $\beta = \angle XPW$ se nazývá **grafický trojnásobek (konvexního) úhlu $\alpha = \angle AVB$.** Grafický trojnásobek (konvexního) úhlu $\alpha = \angle AVB$ symbolicky zapisujeme $3 \cdot \alpha = \beta$.



Vlastnosti operace (přirozeného) násobku tříd shodných (konvexních) úhlů:

Operace (přirozeného) násobku tříd shodných (konvexních) úhlů je:

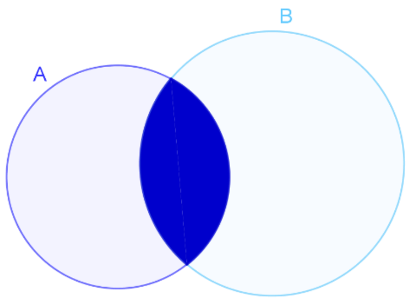
- **úplná**
- **asociativní**
- **komutativní**
- **distributivní**
  - např. $2 \cdot (\alpha + \beta) = 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta$ pro úhly α, β

10.3 Množinové operace s bodovými množinami

10.3.1 Průnik bodových množin

Žáci na 1. stupni základní školy používají místo pojmu průnik speciální termíny – průsečík, průsečnice, apod. Dále také pojmenovávají konkrétními názvy ty objekty, které jsou útvarům společné.

V matematice se jako **průnik** dvou nebo více množin označuje taková množina, která obsahuje pouze ty prvky, které se nacházejí současně ve všech těchto množinách, a obsahuje všechny takové prvky. Průnik množin A a B se označuje symbolem $A \cap B$. Na obrázku je znázorněn průnik kruhů A a B.



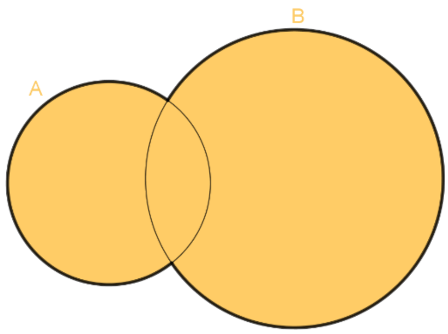
Využití průniku bodových množin na ZŠ:

- **při třídění** např. vzájemných poloh přímek – rovnoběžky nemají žádný společný bod
- **při konstrukčních úlohách**, např. hledaný vrchol obrazce je průsečíkem dvou přímek, resp. dvou kružnic
- **při řešení úloh pomocí množin bodů daných vlastností**, tj. hledaný objekt je průnikem alespoň dvou množin daných vlastností, např. střed hledané kružnice je průsečíkem přímky a kružnice, z nichž přímka i kružnice splňují určité vlastnosti
- **při určování prvků prostorové geometrie**, např. společná část sousedních stěn tělesa se nazývá hrana

10.3.2 Sjednocení bodových množin

Žáci ZŠ používají místo termínu sjednocení pojmy – souhrn, spojení, všechny možné, z jednoho nebo z druhého geometrického útvaru apod.

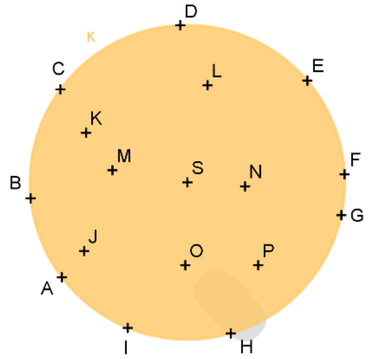
V matematice se jako **sjednocení** dvou nebo více množin označuje taková množina, která obsahuje každý prvek, který se nachází alespoň v jedné ze sjednocovaných množin, a žádné další prvky. Sjednocení množin A a B se označuje symbolem $A \cup B$. Na obrázku je znázorněno sjednocení kruhů A a B.



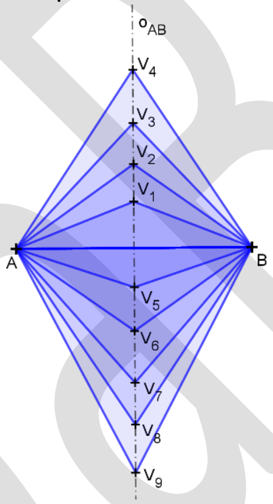
Využití sjednocení bodových množin na ZŠ

Sjednocení bodových množin

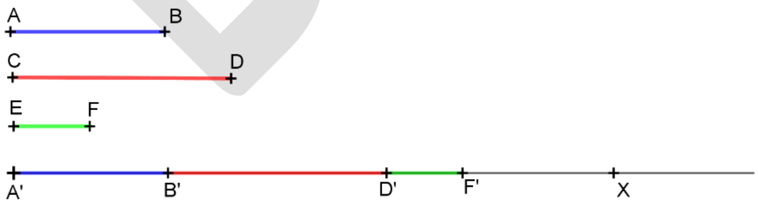
- **umožňuje definování některých geometrických útvarů**
  - např. *body kruhu* jsou sjednocením bodů kružnice a bodů uvnitř kružnice



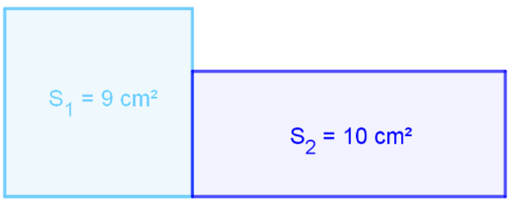
  - např. *osa úsečky* je sjednocením nekonečně mnoha bodů, které jsou vrcholy rovnoramenných trojúhelníků se společnou základnou v dané úsečce



- **je podstatou aritmetických operací v geometrii**
  - např. *grafický součet úseček* je spojení úseček nanesených „za sebou“ na polopřímku tak, aby sousední úsečky měly společné právě jen krajní body



- **umožňuje výpočet velikosti míry složených geometrických útvarů**
  - např. *velikost obsahu útvaru vzniklého spojením čtverce a obdélníku*, které se nepřekrývají, určíme sečtením obsahů těchto jednotlivých útvarů



10.4 Operace skládání zobrazení

10.4.1 Geometrické zobrazení

Definice 10.2:
Binární relace, v níž prvku z prvního oboru relace patří nejvýše jeden prvek z druhého oboru relace, se nazývá **zobrazení**. Zobrazení označme *Z*.

- Jsou-li prvky oborů množiny bodů, nazývá se zobrazení **geometrické**.
- Zobrazení bodových množin na sebe, zejména pokud jsou prostá, se nazývají **transformace**.

Definice 10.3:
Geometrické zobrazení v rovině ρ je **zobrazení** množiny bodů roviny ρ **do** množiny bodů roviny ρ právě tehdy, když každému bodu $X \in \rho$ je přiřazen právě jeden bod $X' \in \rho$. Bod *X* je vzor, bod *X´* obraz bodu *X* v tomto zobrazení.

Definice 10.4:
Je-li každý bod *X´* roviny ρ obrazem alespoň jednoho bodu *X* roviny ρ, pak se jedná o **zobrazení** roviny ρ **na** rovinu ρ.

Definice 10.5:
Prostá zobrazení jsou zobrazení, v nichž jsou každým dvěma různým vzorům přiřazeny dva různé obrazy (můžeme hovořit o tzv. vzájemně jednoznačných zobrazeních).

Definice 10.6:
Bod *A* nazýváme **samodružný bod** zobrazení *Z*, jestliže je v daném zobrazení *Z* obrazem bodu *A* týž bod *A*, tj. jestliže platí $Z(A) \equiv A' \equiv A$.

Definice 10.7:
Je-li v daném zobrazení *Z* obrazem geometrického útvaru *U* útvar *U´*, který s útvarem *U* splývá, nazývá se útvar *U* **samodružným útvarem** příslušného zobrazení *Z*, tj. symbolicky píšeme $Z(U) \equiv U' \equiv U$.

Poznámka: Samodružný útvar nemusí být v daném zobrazení útvarem samodružných bodů. Např. obraz rovnoramenného trojúhelníku *ABC* s osou souměrnosti splývající s osou základny *AB* trojúhelníku není útvarem samodružných bodů. V dané osové souměrnosti jsou samodružnými body pouze střed základny *AB* a vrchol *C* trojúhelníku *ABC*. Obraz *B’A’C’* je však totožný s trojúhelníkem *ABC* a trojúhelník *ABC* je tak samodružným útvarem v dané osové souměrnosti.

Definice 10.8:
Zobrazení, ve kterém je každý bod samodružný, se nazývá **identita.** Označuje se ***I*** (někdy ***J***).

Definice 10.9:
Vztahy, které se při daném zobrazení nemění (např. velikosti úseček, velikosti úhlů, smysl obíhání vrcholů trojúhelníku apod.) se nazývají **invariantní** (tj. neměnné); zkráceně **invarianty**.

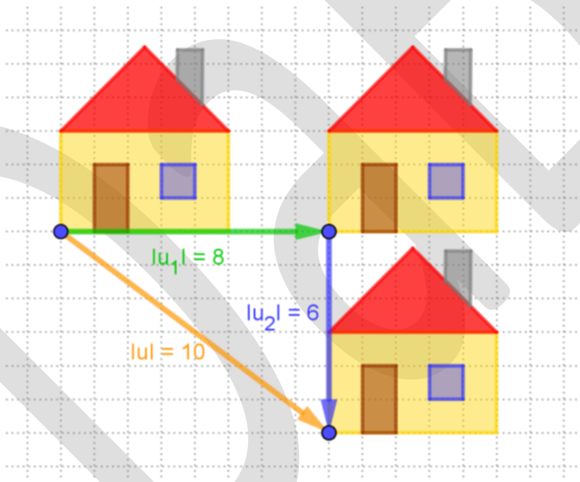
10.4.2 Skládání geometrických zobrazení

Definice 10.10:
Nechť jsou dána dvě zobrazení Z_1, Z_2 množiny M. Proveďme po řadě nejprve zobrazení Z_1 a poté zobrazení Z_2. Každý bod X množiny M se zobrazením Z_1 zobrazí nejprve do bodu $X' \equiv Z_1(X)$ a potom se bod X' zobrazením Z_2 zobrazí do bodu $X'' \equiv Z_2(X')$ množiny M. Tj. bod X'' lze zapsat předpisem $X'' \equiv Z_2(X') \equiv Z_2(Z_1(X))$, čímž získáváme zobrazení Z množiny M, v němž je bodu X jednoznačně přiřazen bod X'', tj. $X'' \equiv Z(X)$. Popsanou operaci nazýváme **skládání zobrazení** a symbolicky ji zapisujeme $Z_1 \circ Z_2 = Z$.

Důsledek: Složením dvou zobrazení Z_1 a Z_2 (značíme $Z_1 \circ Z_2$) vzniká zobrazení Z dané předpisem:
$Z = Z_1 \circ Z_2$.

Poznámka: Skládání zobrazení patří mezi operace. Operaci skládání zobrazení označujeme kolečkem „∘“ nebo tečkou „·“.

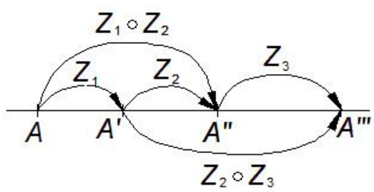
Na 1. stupni ZŠ je skládání zobrazení možné názorně procvičovat např. při posouvání objektů ve čtvercové síti. Ve čtvercové síti zobrazíme objekt, např. domek, který nejprve posuneme ve čtvercové síti v posunutí Z_1 o 8 jednotek horizontálně doprava a poté v posunutí Z_2 o 6 jednotek vertikálně dolů. Složením uvedených posunutí Z_1 a Z_2 vznikne posunutí Z o 10 jednotek šikmo vpravo dolů.



Vlastnosti operace skládání zobrazení

Operace skládání zobrazení:

- je **úplná**
- je **asociativní**, tj. platí $(\forall Z_1, Z_2, Z_3) : Z_1 \circ (Z_2 \circ Z_3) = (Z_1 \circ Z_2) \circ Z_3$



- **není** obecně **komutativní,** tj. **nemusí** obecně **platit**, že by $(\forall Z_1, Z_2)$: $Z_1 \circ Z_2 = Z_2 \circ Z_1$
- má **neutrální prvek** - neutrálním prvkem je ***identita I***, přitom platí, že $Z \circ I = I \circ Z = Z$

- má **inverzní prvky** – ***inverzní zobrazení***, např. k R ($S, +\alpha$) je inverzní R ($S, -\alpha$) .

Z uvedených vlastností plyne, že **operace skládání zobrazení** tvoří **nekomutativní grupu.**

Definice 11.11:
Ke každému prostému zobrazení Z můžeme sestrojit tzv. **inverzní zobrazení** (značíme Z^{-1}), které je dáno vztahem $Z \circ Z^{-1} = Z^{-1} \circ Z = I$.

Poznámka: Je zřejmé, že $Z^{-1}(B) = A$, právě když $Z(A) = B$. Bod A, který je v zobrazení Z vzorem, se stává v zobrazení Z^{-1} obrazem a naopak.

Definice 11.12:
Zobrazení Z, které není identitou, nazýváme **involutorní zobrazení** (nebo též zkráceně **involuce**), právě když platí $Z^2 = Z \circ Z = I$, tj. involutorní zobrazení je inverzní samo k sobě, tedy $Z^{-1} = Z$.

Definice 11.13:
Je-li v daném zobrazení Z obrazem bodu X bod X' a obrazem bodu $Y = X'$ bod $Y' = X$, pak takovou dvojici bodů nazýváme **involutorní dvojicí bodů** daného zobrazení Z.

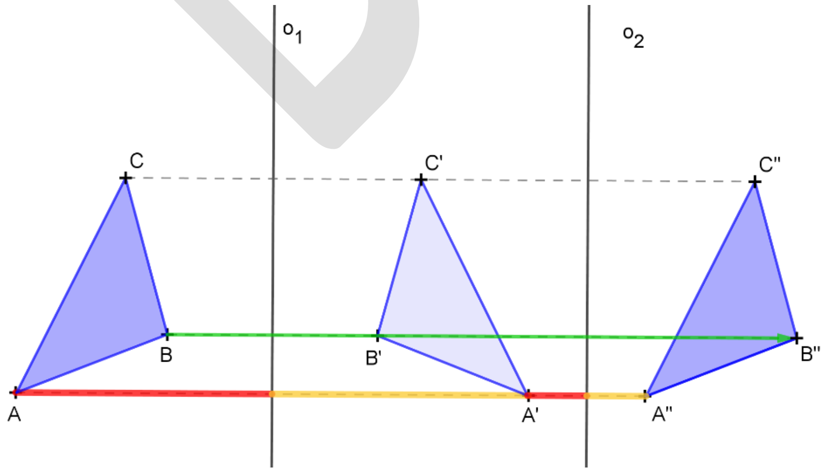
11.4.3 Operace skládání shodných zobrazení

11.4.3.1 Operace skládání dvou osových souměrností v rovině

Následují některá z možných skládání dvou osových souměrností v rovině, u nichž uvažujeme, že osy osových souměrností jsou

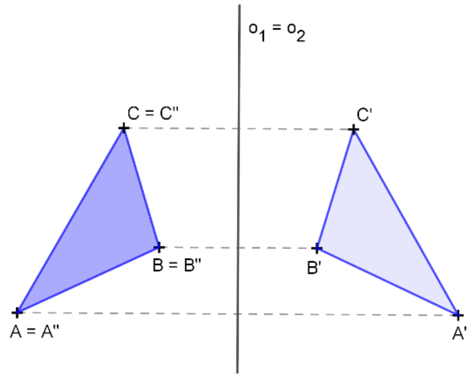
a) navzájem rovnoběžné různé

- složením dvou osových souměrností s navzájem rovnoběžnými různými osami vznikne **posunutí** (**translace**), velikost posunutí je rovna dvojnásobku vzdálenosti os a směr posunutí je kolmý k osám obou souměrností. Smysl posunutí je jednoznačně určen pořadím os.



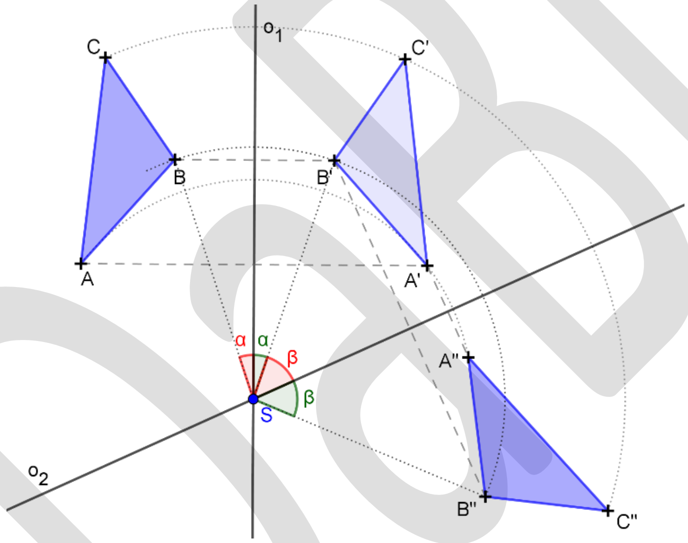
b) rovnoběžné splývající

- složením dvou osových souměrností s navzájem rovnoběžnými splývajícími osami vznikne **identita**



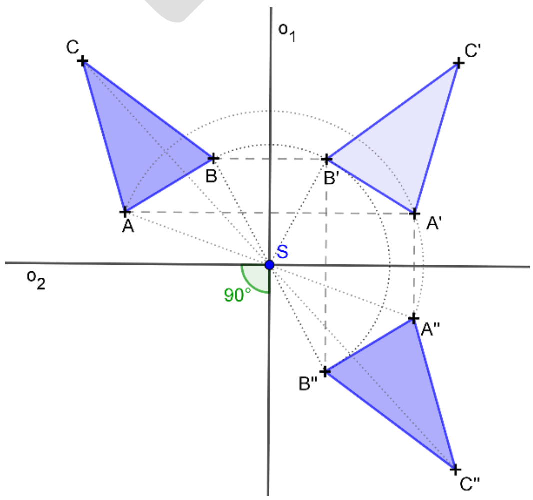
c) různoběžné

- složením dvou osových souměrností s navzájem různoběžnými osami vznikne **otočení** (**rotace**), jehož středem je průsečík obou různoběžných os. Velikost úhlu otočení je rovna dvojnásobku velikosti ostrého nebo pravého úhlu, který svírají osy o_1, o_2 obou osových souměrností. Smysl otočení je dán pořadím os.



d) různoběžné kolmé

- složením dvou osových souměrností s navzájem kolmými osami vznikne **středová souměrnost** (**rotace o 180°**), jejímž středem je průsečík obou kolmých os

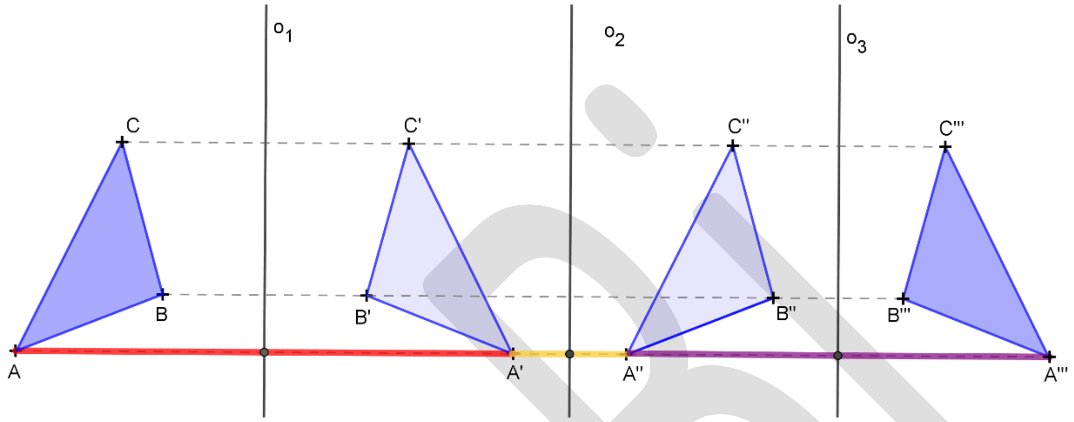


10.4.3.2 Operace skládání tří osových souměrností v rovině

Dále jsou představena některá z možných skládání tří osových souměrností v rovině, u nichž uvažujeme, že osy souměrností zaujímají následující vzájemné polohy:

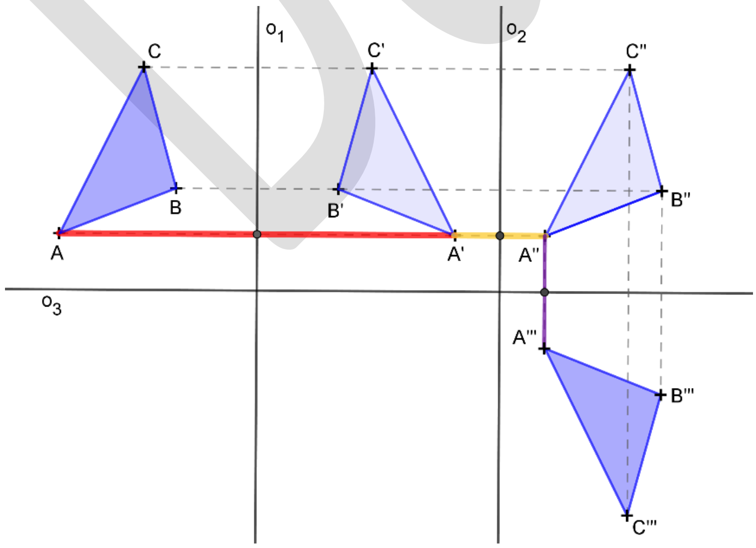
a) všechny tři osy jsou navzájem rovnoběžné různé

- složením tří osových souměrností s navzájem rovnoběžnými různými osami vznikne **osová souměrnost**, jejíž osou souměrnosti je osa úseček, jejichž krajními body jsou vzory (body *A, B* a *C*) a jim odpovídající obrazy (tj. body *A′′′, B′′′* a *C′′′*).



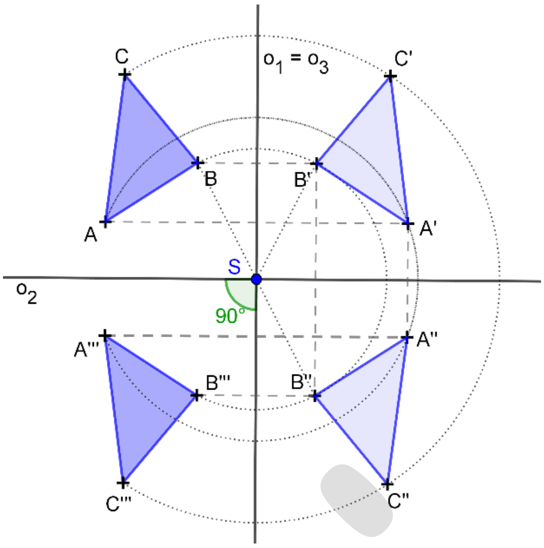
b) dvě osy jsou navzájem rovnoběžné různé a přitom jsou obě kolmé k třetí ose

- složením dvou osových souměrností s navzájem rovnoběžnými různými osami a osové souměrnosti s osou kolmou k oběma navzájem rovnoběžným osám vznikne **posunuté zrcadlení**. Velikost posunutí je rovna dvojnásobku vzdálenosti navzájem rovnoběžných různých os, směr posunutí je kolmý k navzájem rovnoběžným osám obou osových souměrností. Smysl posunutí je jednoznačně určen pořadím os. Zrcadlení je určeno osovou souměrností danou třetí osou.



c) dvě osy jsou rovnoběžné splývající a jsou kolmé ke třetí ose

- složením tří osových souměrností, kde osa o_2 je kolmá ke splývajícím osám o_1 a o_3, vznikne **zrcadlení**



10.4.3.3 Operace skládání shodných zobrazení v rovině

Skládání shodných zobrazení v rovině má následující vlastnosti:

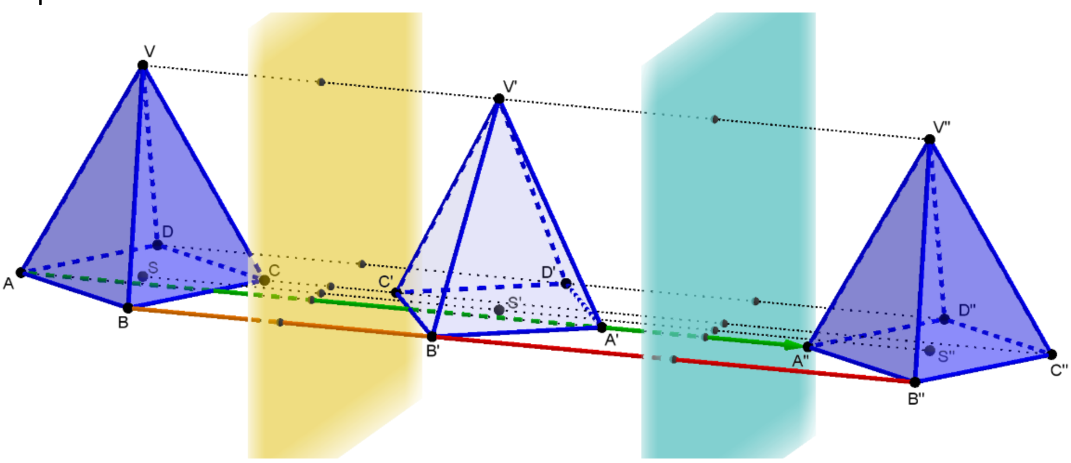
- Každé shodné zobrazení v rovině vznikne složením nejvýše 3 osových souměrností.
- Složením sudého počtu osových souměrností vznikne přímá shodnost (identita, translace, rotace, středová souměrnost).
- Složením lichého počtu osových souměrností vznikne nepřímá shodnost (osová souměrnost, posunuté zrcadlení, zrcadlení).

10.4.3.4 Operace skládání dvou rovinových souměrností v prostoru

Skládání rovinových souměrností v prostoru je analogií skládání osových souměrností v rovině, i když výsledným zobrazením v prostoru je v některých případech jiné zobrazení než v rovině. Dále uvedeme některé z možných skládání rovinových souměrností v prostoru, tj. uvažujme

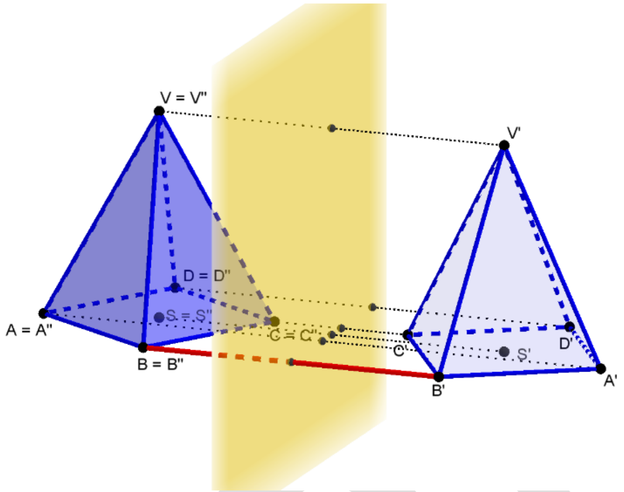
a) dvě navzájem rovnoběžné různé roviny souměrnosti

- složením dvou rovinových souměrností s navzájem rovnoběžnými různými rovinami vznikne **posunutí** (**translace**), velikost posunutí je rovna dvojnásobku vzdálenosti rovin souměrností a směr posunutí je kolmý k rovinám obou souměrností. Smysl posunutí je jednoznačně určen pořadím rovin.



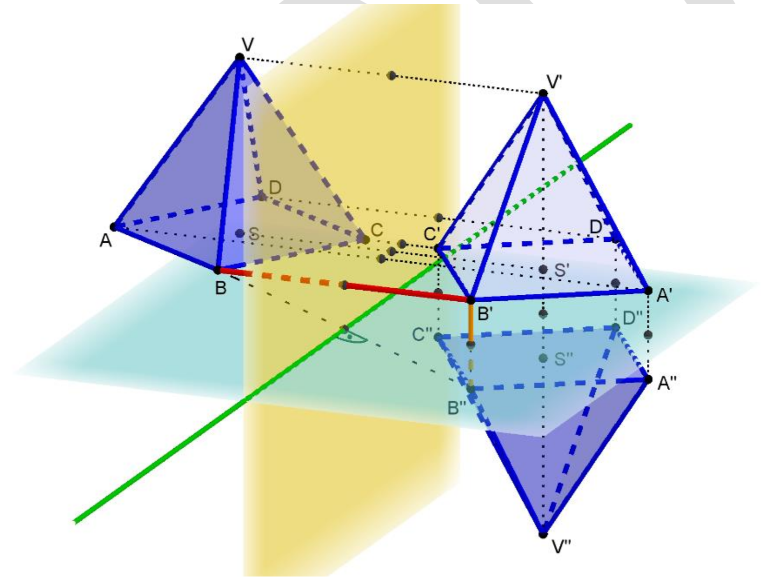
b) dvě navzájem rovnoběžné splývající roviny souměrnosti

- složením dvou rovinových souměrností s navzájem rovnoběžnými splývajícími rovinami vznikne **identita**



c) dvě k sobě kolmé roviny souměrnosti

- složením dvou rovinových souměrností s navzájem kolmými rovinami vznikne **osová souměrnost** v prostoru s osou souměrnosti v průsečnici kolmých rovin

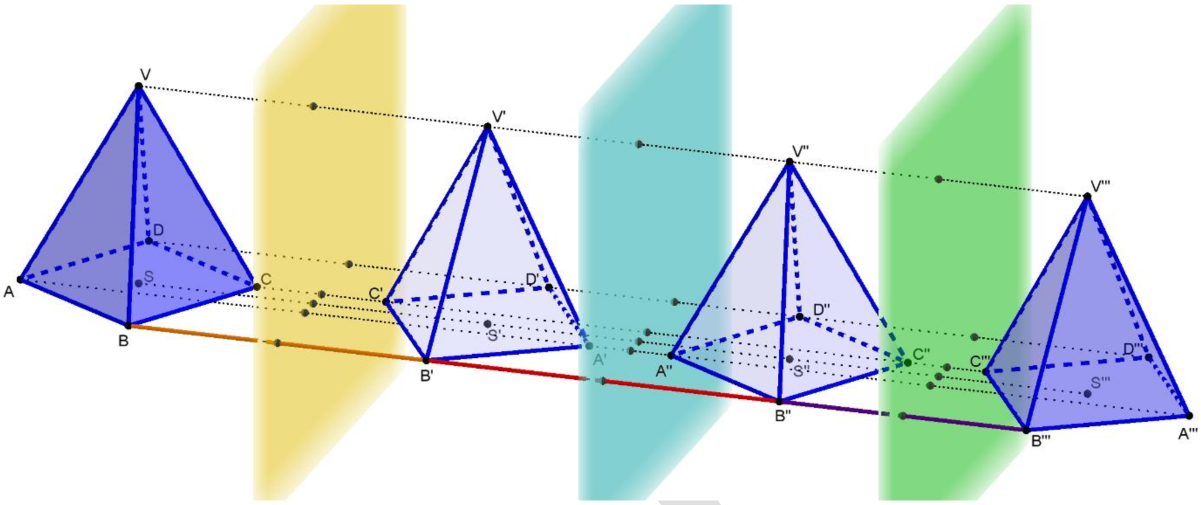


10.4.3.5 Operace skládání tří rovinových souměrností v prostoru

Následují ukázky některých možných skládání tří rovinových souměrností v prostoru, u nichž uvažujeme, že roviny souměrností zaujímají následující vzájemné polohy:

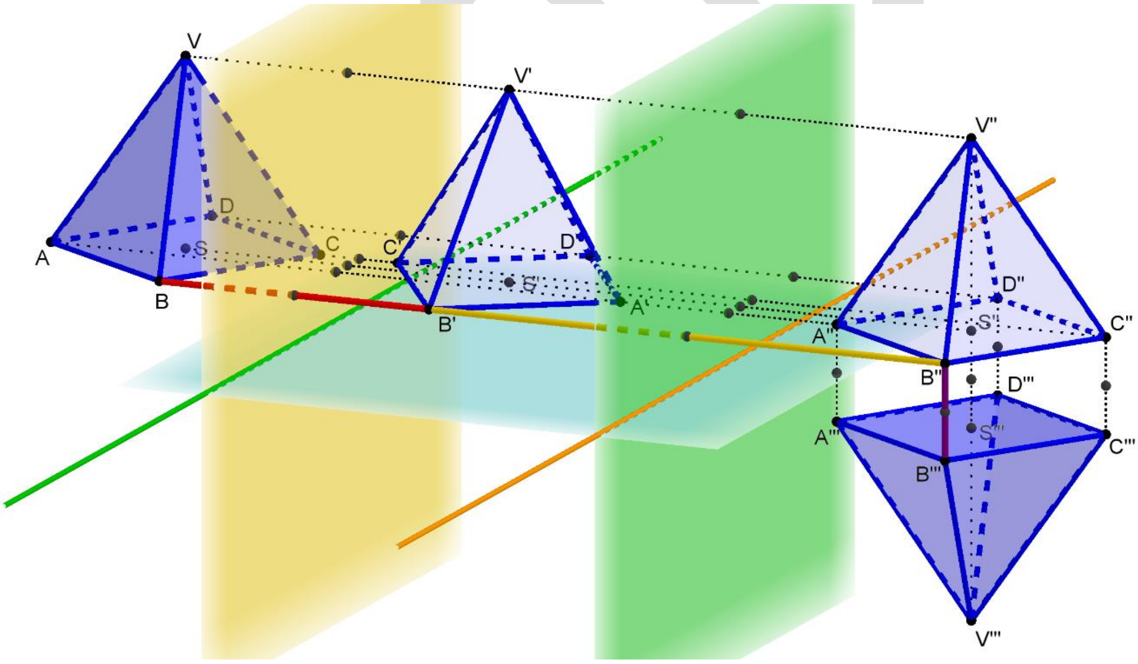
a) všechny tři roviny souměrností jsou navzájem rovnoběžné různé

- složením tří rovinových souměrností s navzájem rovnoběžnými různými rovinami vznikne **rovinová souměrnost**, jejíž rovinou souměrnosti je rovina souměrnosti úseček, jejichž krajními body jsou vzory (body *A, B* a *C*) a jim odpovídající obrazy (tj. body *A′′′, B′′′* a *C′′′*).



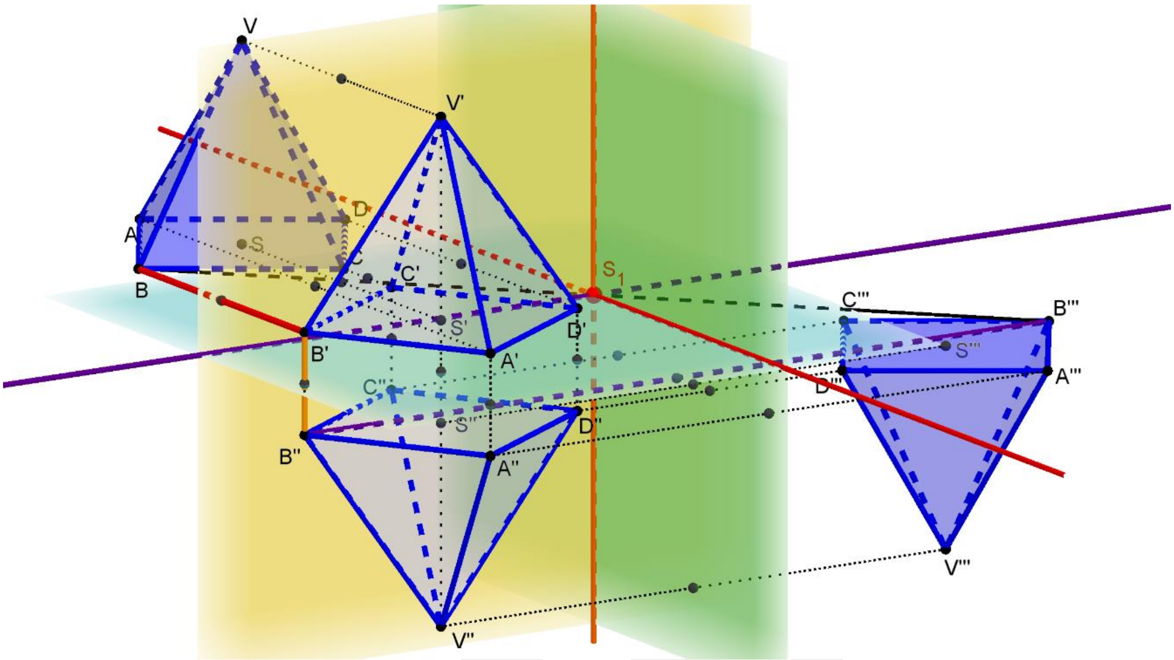
b) dvě roviny jsou navzájem rovnoběžné různé a přitom jsou obě kolmé ke třetí rovině

- složením dvou rovinových souměrností s navzájem rovnoběžnými různými rovinami a rovinové souměrnosti s rovinou kolmou k oběma navzájem rovnoběžným rovinám vznikne **posunuté zrcadlení**. Velikost posunutí je rovna dvojnásobku vzdálenosti navzájem rovnoběžných různých rovin, směr posunutí je kolmý k navzájem rovnoběžným rovinám obou rovinových souměrností. Smysl posunutí je jednoznačně určen pořadím rovin. Zrcadlení je určeno rovinovou souměrností danou třetí rovinou.



b) tři roviny navzájem kolmé roviny

- složením tří rovinových souměrností s navzájem různými kolmými rovinami vznikne **středová souměrnost** v prostoru se středem v průsečíku třech navzájem kolmých rovin



10.5 Užití binárních operací na ZŠ

Podle RVP základního vzdělávání žák:

● Rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa (např. průnik bodových množin – společná část sousedních stěn tělesa se nazývá hrana).

● Sčítá a odčítá graficky úsečky (např. pomocí proužku papíru, provázku nebo konstrukcí).

● Sestrojí rovnoběžky a kolmice (např. využití průniku bodových množin – třídění vzájemných poloh přímek).

● Narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici), užívá jednoduché konstrukce např. využití průniku bodových množin – hledaný vrchol obrazce je průsečíkem dvou přímek.

● Určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu (např. využití sjednocení bodových množin – velikost obsahu útvaru vzniklého spojením čtverce a obdélníka, které se nepřekrývají, určíme sečtením obsahů těchto jednotlivých útvarů).

● Rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru
- např. sjednocení bodových množin – osa úsečky je sjednocením nekonečně mnoha bodů, které jsou vrcholy rovnoramenných trojúhelníků se společnou základnou v dané úsečce;
- osově souměrné obrázky – rozpoznávání, dokreslování, poznávání vlastností čtverce a jeho úhlopříček nebo půlení obsahu atd. – pomocí překládání papíru

Použité zdroje:

- Eiblová, L. – Melichar, J. – Šestáková, M.: *Matematika pro 4. ročník základní školy*. SPN, Praha 2017. ISBN 978-80-7235-599-0