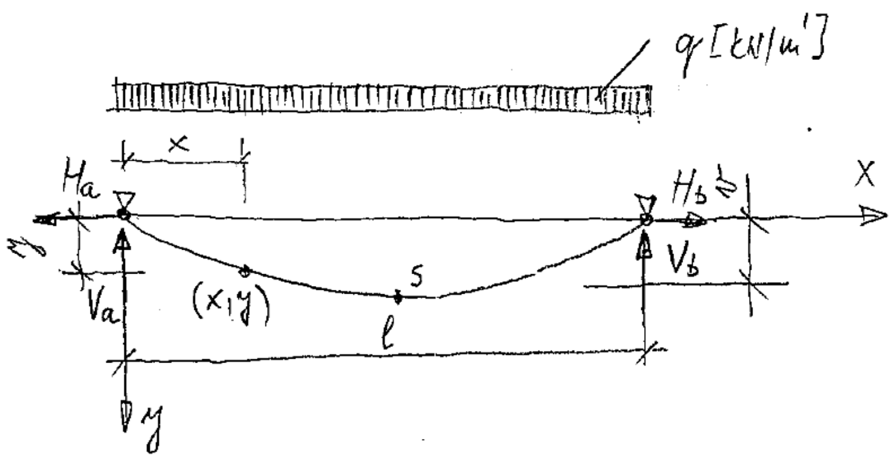
BETONOVÉ KONSTRUKCE II/7

Pro pochopení chování plošných 2D konstrukcí charakteru membrán a skořepin jsou nejprve popsány základní vlastnosti odpovídajících 1D prvků, tedy řetězovek a oblouků. Podrobněji je tato látka popsána ve studijních textech pro předmět AS2.

18. Řetězovky

18.1 Parabolická řetězovka

Ohebné vlákno (lano, řetěz) nepřenáší ohybové ani posouvající síly, ale pouze síly normálné, které mají směr tečny ke křivce. Zavěsíme-li ohebné vlákno na dva závěsné body, bude výsledná křivka kopírovat výslednici tahových sil.
Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze symetrické vlákno, se závěsnými body ve stejné výši. V nejjednodušším případě může být nehmotné vlákno zatíženo po půdoryse rovnoměrně rozloženým spojitým zatížením. Toto zatížení může být vyvozeno například sněhem.



V obrázku je l rozpětí vlákna
v průvěs vlákna

Při obecném zatížení by byla úloha staticky neurčitá, protože obecně by v každém ze dvou závěsů vznikly dvě složky reakce (svislá a vodorovná), celkem tedy 4 neznámé síly, na jejichž výpočet by nestačily tři podmínky rovnováhy sil v rovině (dvě součtové a jedna momentová). V případě svislého zatížení a navíc u symetrické konstrukce, však můžeme chybějící podmínku rovnováhy nahradit podmínkou symetrie, z níž okamžitě vidíme, že síly v závěsných bodech jsou stejné a tedy

$$H_a = H_b = H \qquad \text{a stejně tak} \qquad V_a = V_b = V$$

Máme tedy pouze dvě neznámé H a V, které snadno stanovíme z podmínek rovnováhy.

Z podmínky rovnováhy ve svislém směru plyne

$$2V - gl = 0$$

odtud snadno velikost svislé reakce

$$V = \frac{ql}{2}$$

Z momentové podmínky ke středu vlákna plyne

$$V.\frac{l}{2} - H.v - \frac{ql}{2}.\frac{l}{4} = 0$$ po dosazení za V vyjde

$$\frac{q.l}{2}.\frac{l}{2} - H.v - \frac{ql^2}{8} = 0$$ odtud po úpravě

$$H = \frac{ql^2}{8v}$$

Čím je průvěs menší, tím je vodorovná síla v závěsu větší.

Maximální sílu ve vláknu v závěsu (v podpoře) pak získáme jako vektorový součet sil V a H, tedy z Pythagorovy věty

$$S = \sqrt{V^2 + H^2}$$

po dosazení a úpravě vyjde

$$S = \frac{ql}{2}.\sqrt{\left(\frac{l}{4v}\right)^2 + 1}$$

Při navrhování konstrukce potřebujeme znát i délku vlákna L, pro kterou přibližně platí vztah

$$L = l\left(1 + \frac{8.v^2}{3.l^2}\right)$$

Tvar křivky, který vlákno zaujme, stanovíme z podmínky, že v obecném bodě řetězovky o souřadnicích (x,y), je ohybový moment roven nule. Tato podmínka zní:

$$M(x,y) = V.\,x - H.y - q.x.\frac{x}{2} = 0$$ po dosazení za $V = \frac{ql}{2}$ a $H = \frac{q.l^2}{8v}$

$$\frac{qlx}{2} - \frac{ql^2y}{8v} - \frac{qx^2}{2} = 0$$ po úpravě vyjde

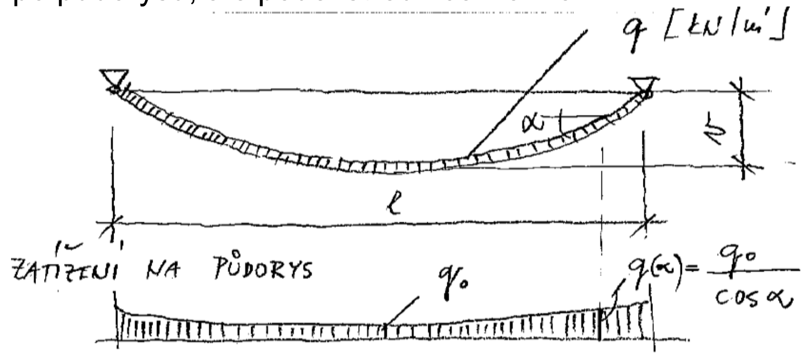
$$y = -\frac{4v}{l^2}x^2 + \frac{4v}{l}x$$ což je rovnice typu

$$y = -ax^2 + bx$$ jejímž grafem je parabola

Vypočítali jsme tedy, že pokud bude vlákno, se stejně vysoko položenými závěsy, zatíženo spojitým zatížením rovnoměrně rozloženým po půdoryse, zaujme tvar **parabolické řetězovky.** Je zřejmé, že jinému typu (rozložení) zatížení, by odpovídala jiná křivka.

18.2 Pravá řetězovka

Důležitý je případ zatížení lana (řetězu) vlastní tíhou. Jde rovněž o spojité rovnoměrné zatížení, ale ne po půdorysu, ale podél střednice vlákna.



Z hlediska výpočtu tvaru střednice jde o komplikovanější případ, jeho řešením je rovnice

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \cosh\frac{x}{a}$$

Kde e je Eulerovo číslo $e = 2{,}71828$ ...
a je konstanta – parametr řetězovky (vzdálenost vrcholu počátku souřadnic)
$\cosh$ je funkce hyperbolického cosinu

19. Membrány

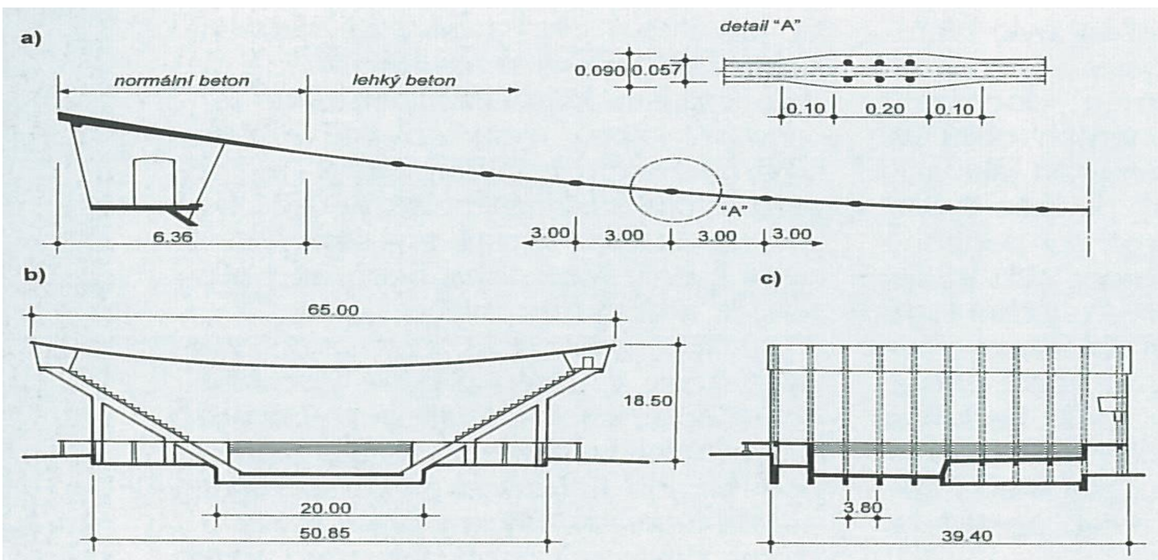
Použijeme – pro zavěšení místo 1D prvku (lana) 2D prvek (plošnou konstrukci), dostaneme konstrukci zvanou membrána.

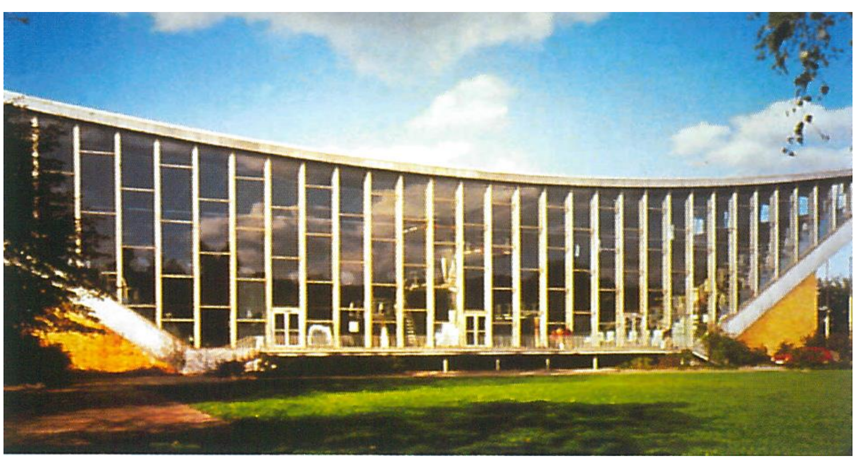
Pavilon Expo 98 v Lisabonu – předepnutá železobetonová membrána -
– rozpětí 80 m, tloušťka 150 mm

Železobetonová membrána zatížená převážně pouze vlastní tíhou (zatížení sněhem v Lisabonu je oproti vlastní tíze zanedbatelné, pokud vůbec) zaujme tvar pravé řetězovky.

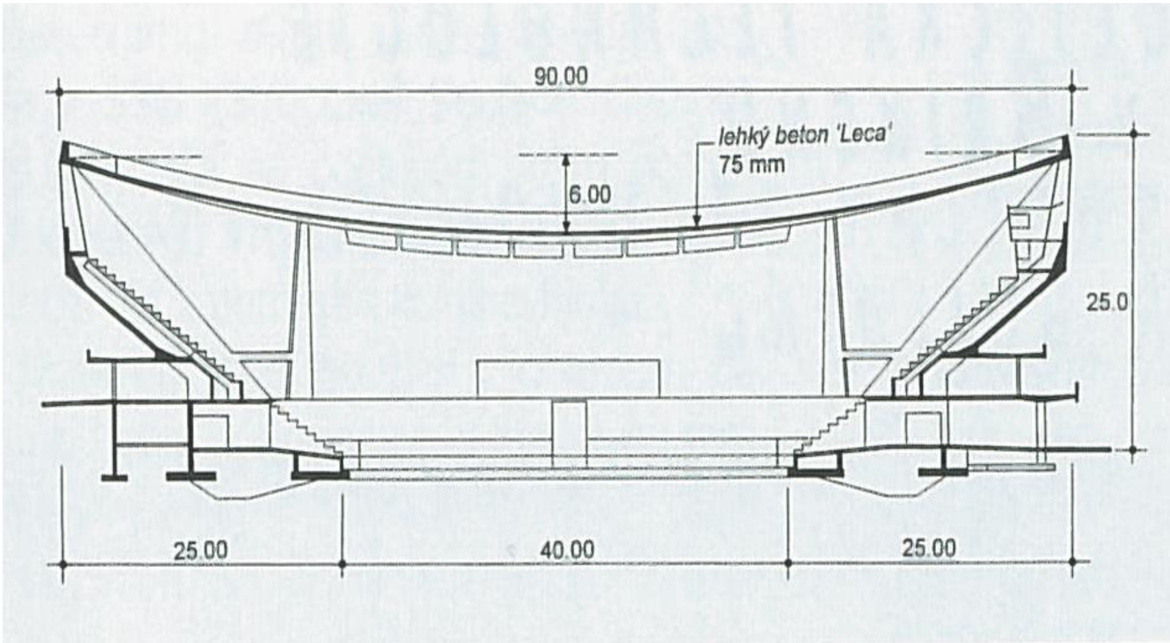
Z porovnání rovnic parabolické a pravé řetězovky je na první pohled zřejmé, že práce s parabolickou řetězovkou je z matematického hlediska jednodušší. Prakticky se ale obě křivky od sebe při průvěsech menších, než v = l/3, příliš neliší. U pravé řetězovky je zatížení, přepočítané na půdorys, větší u závěsných bodů a proto má ve srovnání s parabolickou řetězovkou větší průvěs v okrajových částech u závěsných bodů a menší průvěs uprostřed rozpětí.
Pro předběžné a přibližné výpočty lze tyto rozdíly zanedbat a pravou řetězovku nahradit řetězovkou parabolickou.

Na následujících obrázcích jsou příklady visutých střech. Stability skořepiny je dosaženo předpětím lan střechy.

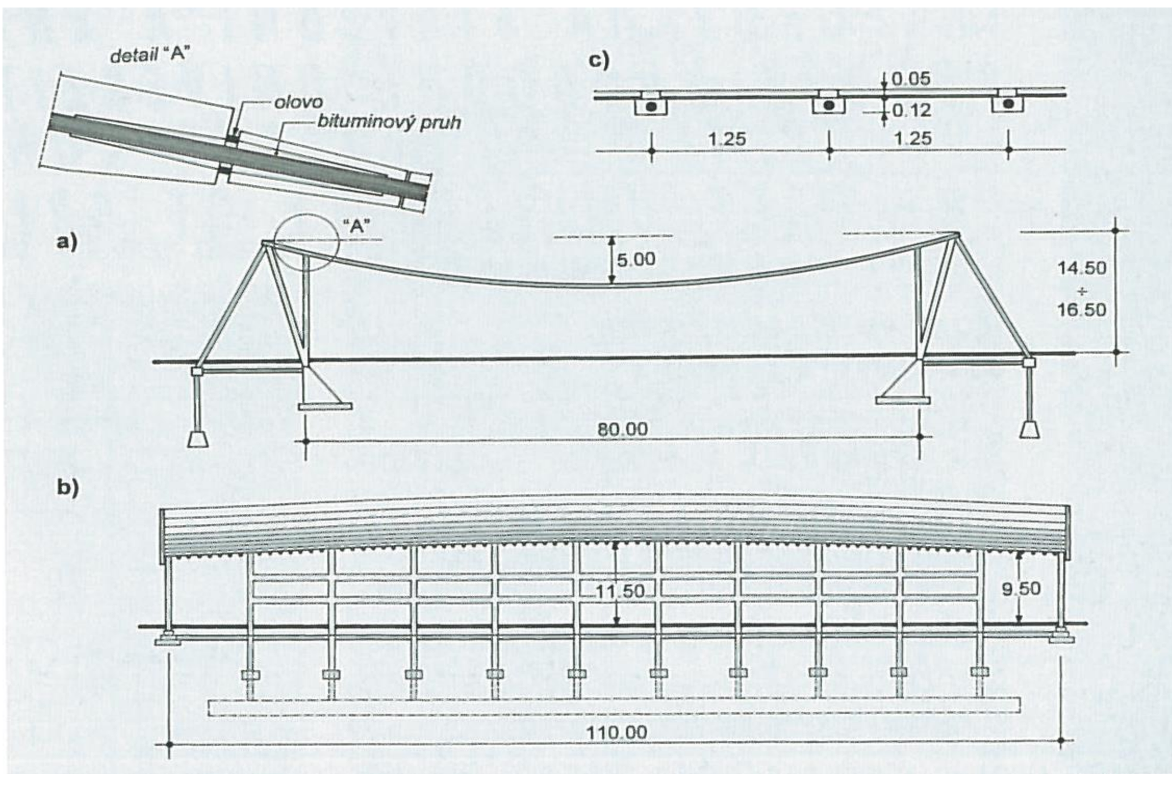




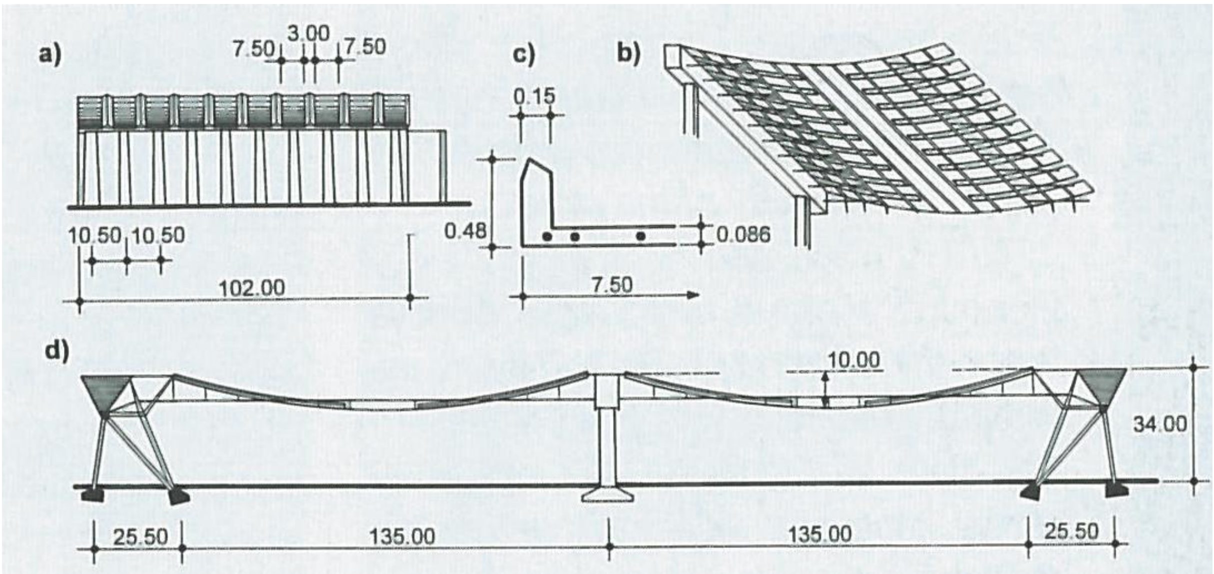
Plavecký stadion ve Wuppertalu – Fritz Leonhardt, 1965
předpjatá visutá skořepina s rozpětím 65 m, tloušťka 57 mm



St. Jakob Sportovní hala v Baselu, Švýcarsko, rozpětí 90 m, tloušťka skořepiny 75 mm



Sportovní hala Dortmund, Německo – rozpětí 80 m,
tloušťka prefabrikovaných desek 50 mm, výška žeber 120 mm



Hangár na letišti ve Frankfurtu (1970)
10 visutých pásů s rozpětím 2 x 135 m nese střední komorový nosník s rozpětím 102 m,
Předpjaté visuté pásy jsou 7,5 m široké, mají průřez tvaru písmene U
s okrajovými žebry 150/480 mm a mezi nimi s deskou tloušťky 86 mm (beton TKS 5/2005)

20. Oblouky

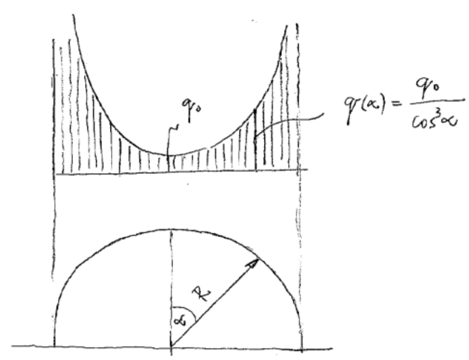
20.1 Parabolický oblouk a oblouk tvaru pravé řetězovky

Otočíme-li výpočtový model parabolické řetězovky z první strany této přednášky okolo vodorovné osy procházející závěsy, dostaneme oblouk. Tahové síly, působící v zavěšeném lanu se změní na tlakové síly v oblouku, jinak zůstane chování stejné (pokud nebudeme brát v úvahu vliv vzpěru).
Na rozdíl od zavěšeného lana nezaujme tlačený oblouk „správnou" křivku střednice sám. Pokud však zvolíme takovou křiku, jejíž střednice bude jistým způsobem odpovídat tvaru zatížení, bude oblouk pouze tlačený a nebudou v něm působit žádné ohybové momenty, ani posouvající síly.

Analogicky jako u zavěšených konstrukcí odpovídá spojitému, po půdoryse rovnoměrně rozdělenému zatížení parabolický oblouk a zatížení rovnoměrně rozdělenému po střednici oblouku (zatížení vlastní tíhou oblouku) oblouk tvaru pravé řetězovky.

20.2 Oblouk tvaru poloviny kružnice

Důležitý pro stavební praxi je oblouk se střednicí ve tvaru kružnice. Stejně jako v předchozích případech je možné najít takové zatížení, při kterém není střednice oblouku ohýbána, ale je namáhána pouze tlakem. Takové zatížení má následující tvar:



Označíme-li zatížení ve vrcholu vzepětí g_0, je zatížení v bodě, odpovídající úhlu α podle obrázku rovno

$$q(\alpha) = \frac{q_0}{cos^3\alpha}$$

Protože cos 90°= 0, vyjde pro krajní body v podporách půlkružnice příslušné zatížení g(90°) nekonečně velké. Aby tedy byla celá půlkružnice pouze tlačená, potřebovali bychom u podpor nekonečně velké zatížení. Zatížení zvětšující se směrem k podporám v určitém rozsahu kolem vrcholu vzepětí vcelku odpovídá vlastní tíze klenby, zatížené zásypem v cípech klenby. Abychom se vyhnuli potřebě nekonečně velkého zatížení v podporách, používáme místo celé půlkružnice většinou pouze část kružnice.

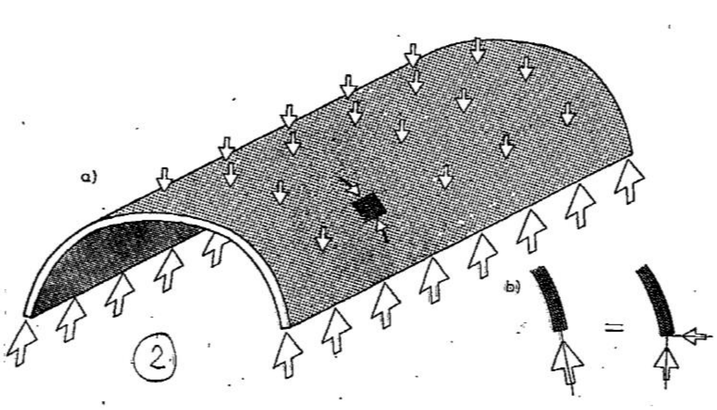
21. Skořepiny

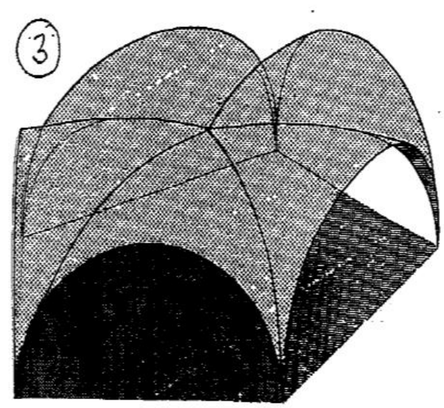
21.1 Skořepiny pravidelných geometrických tvarů

V odborné literatuře lze nalézt řadu typů skořepin, které lze dělit například podle geometrických tvarů použitých ploch:

- Dlouhé válcové skořepiny (jejich působení bylo popsáno v předchozí přednášce)
- Krátké válcové skořepiny
- Kopule
- Konoidy
- Hyperbolické paraboloidy
- Rotační hyperboloidy

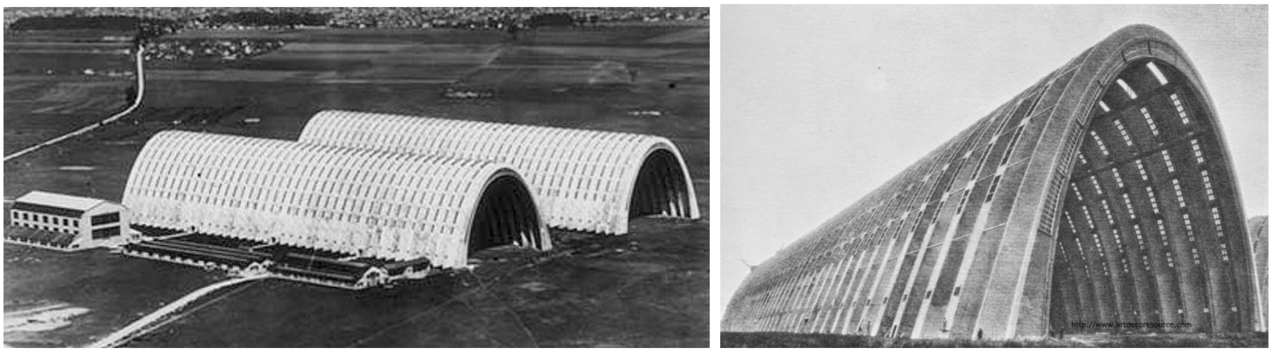
Krátká válcová skořepina působí v příčném směru jako oblouk – je tlačená.





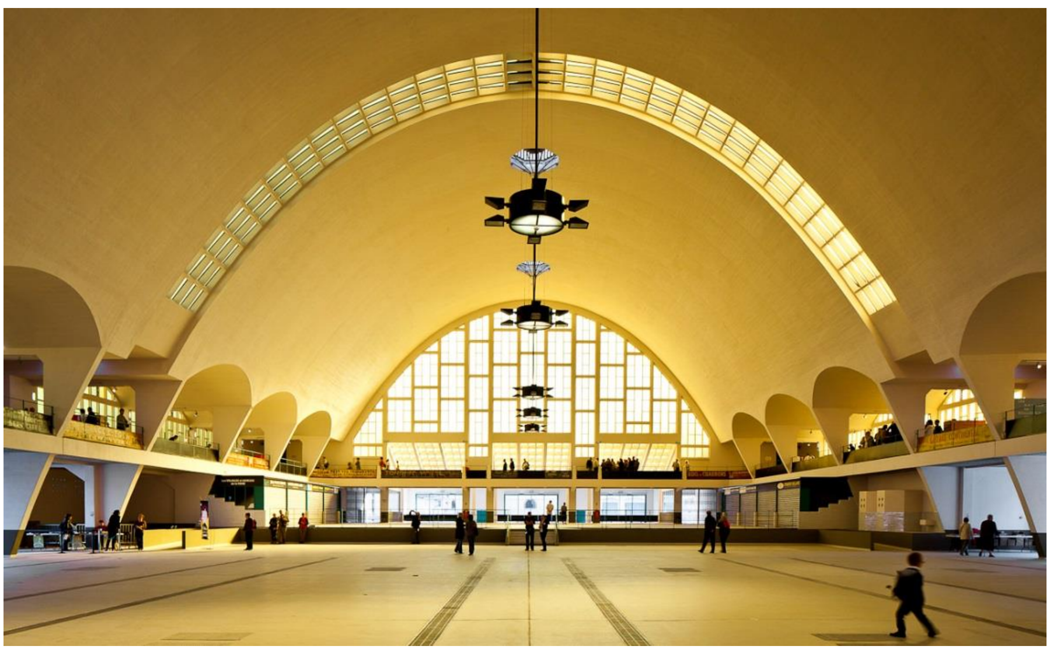
Pronikem více válcových skořepin lze získat složitější tvary

Příkladem krátké válcové skořepiny byly hangáry z parabolických oblouků s rozpětím 60 m (vnitřní světlost asi 50 m), výšky 90 m a délky asi 300 m podle návrhu Eugene Freyssineta, které byly postaveny v letech 1921 až 1923 byly na letišti Orly v Paříži. Hangáry byly sestaveny z lomenicových modulů šířky 7,5 m, jejichž výška v patě byla 5,4 m a ve vrcholu 3,5 m, tloušťka skořepiny byla 90 mm. Hangáry byly zničeny při bombardování v roce 1944.
Připomeňme, že parabolický oblouk je pouze tlačený (ohybové momenty jsou nulové) od spojitého zatížení, rovnoměrně rozděleného po půdoryse oblouku. Takovému zatížení odpovídá například zatížení sněhem.

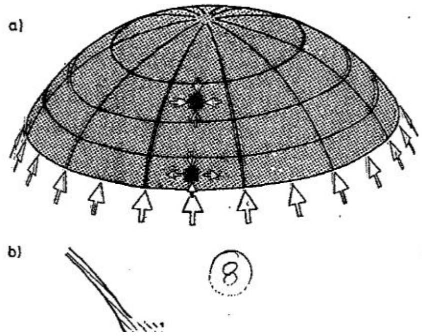


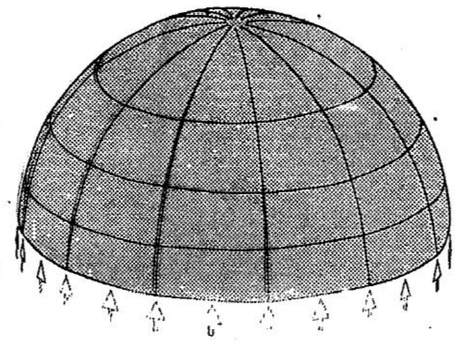
Hangáry v Orly – Freyssinet 1924 – 1923

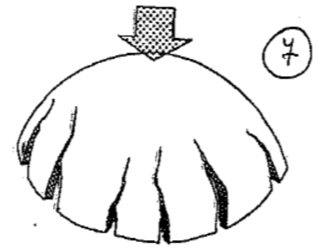
Jinou Freyssinetovou stavbou, která se dochovala dodnes, je tržnice Les Halles du Boulingrin v Reims ve Francii. Byla postavena 1928, rozpětí parabolické skořepiny je 38,26 m, tloušťka skořepiny 70 mm.



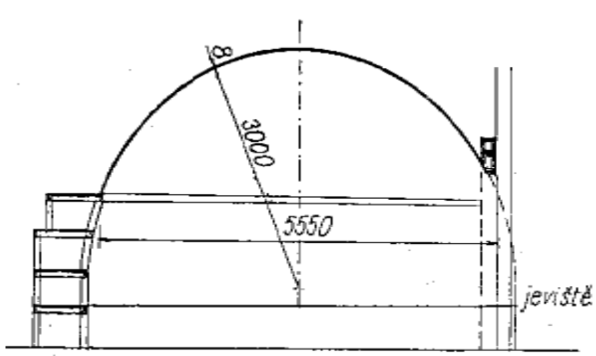
Kopule je velice stabilní plocha. Ve směru poledníků je tlačená, ve směru rovnoběžek je tažená. Úseč kulové plochy má v podporách šikmou reakci – potřebuje stahující patní obrubu. Polokulová plocha má v patě pouze svislou reakci.







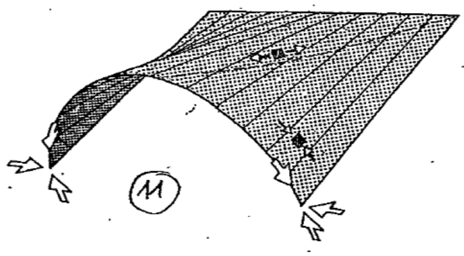
Tržnice v Algeciras, Španělsko – Eduardo Torroja, 1933
část kulové plochy, rozpětí 47,62 m, tloušťka 90 mm

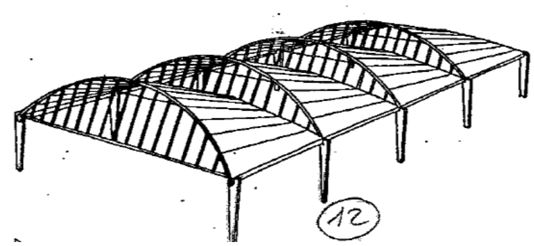


Divadlo Novosibirsk – 1944 - rozpětí 55,50 m
(kulová báň o poloměru 30 m) tloušťka 80 mm

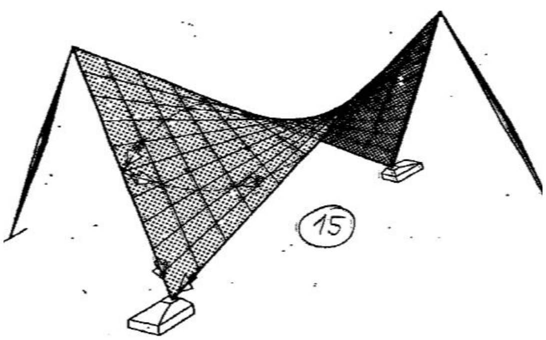
Konoidy se využívají například pro konstrukce světlíků, především u průmyslových staveb

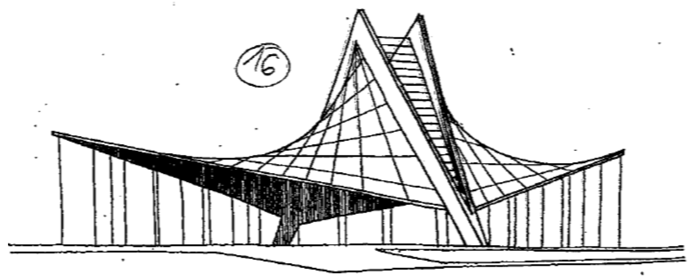
118



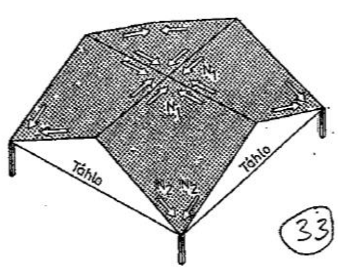


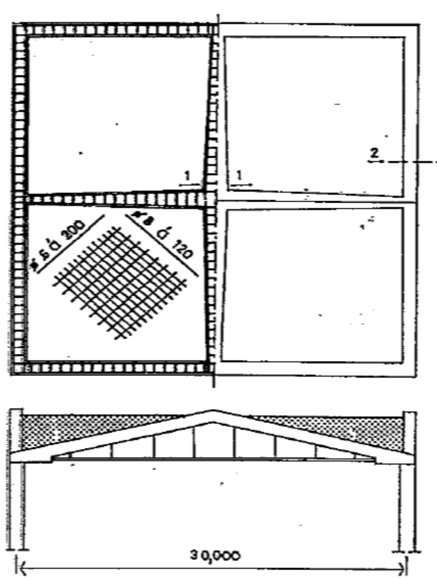
Hyperbolický paraboloid – zborcená přímková plocha.

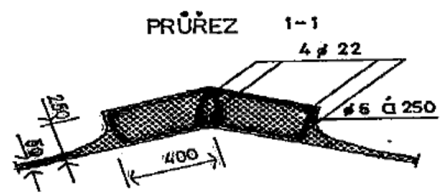


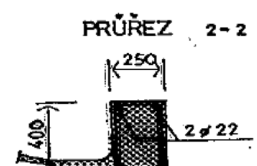


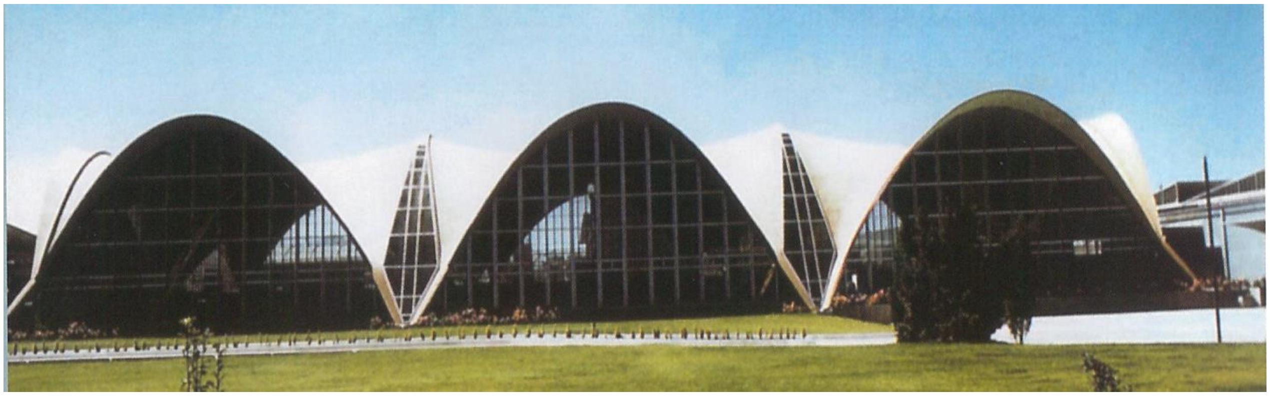
45





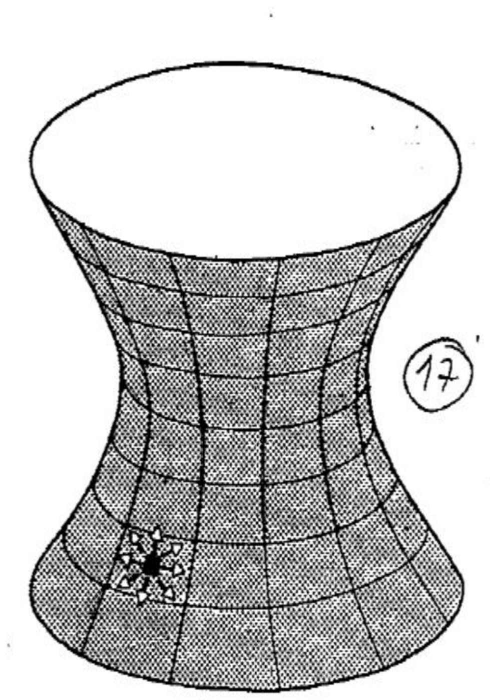






Továrna Bacardi, Cautitlán – Félix Candela 1960
hyperbolické paraboloidy, tloušťka převážně 40 mm (beton TKS 2/2009)

Rotační hyperboloid – chladicí věže elektráren. Výška věže je běžně 100 m, tloušťka typicky 200 až 300 mm. Skořepina je jak ve směru poledníků, tak ve směru rovnoběžek tlačená.

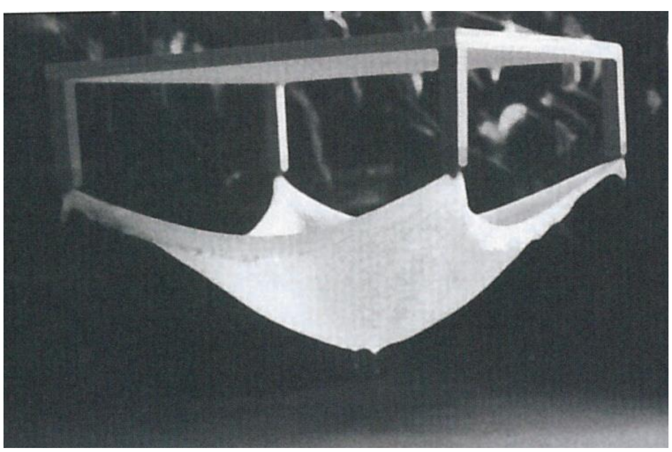


21.2 Membránová napjatost skořepin

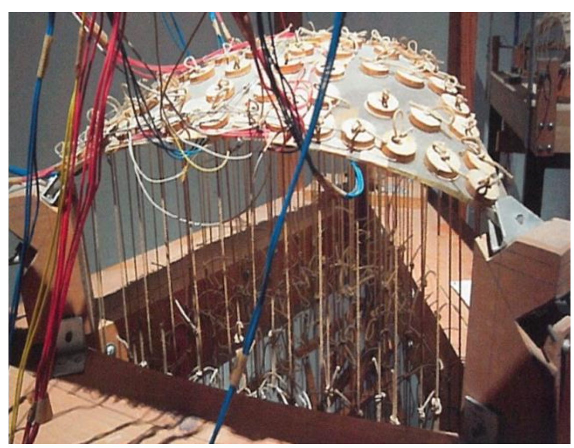
Všechny skořepiny mají jeden společný rys. Pokud má být skořepina skutečnou skořepinou, měly by v ní převládat pouze normálné síly v tečné rovině ke střednicové ploše (tah – tlak) a smykové síly rovněž v rovině tečné ke střednicové ploše. Výslednice sil pak leží také v tečné rovině k ploše. Takovému stavu říkáme membránová napjatost. Membránové působení je výhodný způsob působení skořepiny, protože odpovídá pouze tlakovému (tahovému) namáhání oblouků (zavěšených vláken). Typická tloušťka takové skořepiny, fungující ve stavu membránové napjatosti, je od 50 až 150 mm.

Základním problémem při navrhování skořepin tedy je, **nalezení „správného" tvaru skořepiny.** A tomuto tvaru je třeba do jisté míry podřídit architektonické řešení. Není tedy správné se ptát, jak tlustá má být skořepina toho a toho tvaru. Správná otázka zní, jaký má mít skořepina tvar, aby mohla mít tloušťku 100 mm.

Nalezení „správného" tvaru střednice symetrického oblouku zatíženého spojitým po půdoryse rovnoměrným zatížením je snadné – jak bylo ukázáno na první stránce této přednášky. Nalezení „správného" tvaru pravé řetězovky je obtížnější, je k němu třeba znalost diferenciálního počtu. Nalezení správného tvaru složitější plochy v prostoru, často komplikovaně podepřené, někdy i s otvory v ploše skořepiny, je velice komplikované.
Před dobou počítačů hledali někteří konstruktéři tvary skořepin experimentálně. Dále jsou popsány některé metody prvně použité švýcarským inženýrem **Heinzem Islerem** v roce 1959. Využíval přitom například analogie, popsané v předchozí části této přednášky. Jednou z takových možností je zavěšení tkaniny, napuštěné například epoxidovou pryskyřicí, na předem zvolené závěsné body (jejichž poloha odpovídá podporám budoucí skořepiny). Tkanina, která nemá ohybovou tuhost, zaujme takový tvar, aby byla pouze tažená. Pokud necháme tkaninu ztvrdnout a otočíme ji kolem vodorovné osy nahoru, dostaneme tvar střednicové plochy, která bude (při zatížení vlastní tíhou) pouze tlačená.



Experiment s modelem ze zavěšené tkaniny - hledání tvaru skořepiny

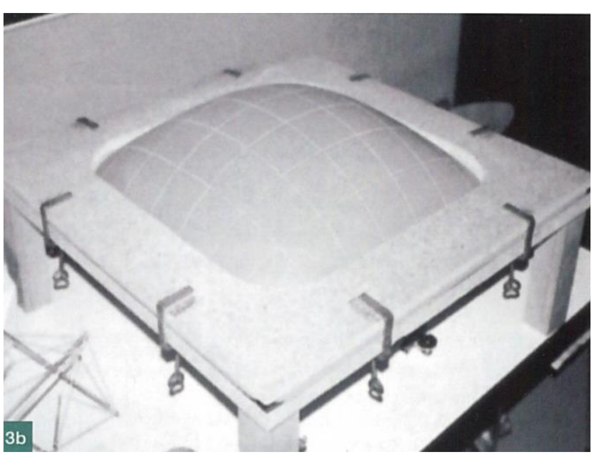


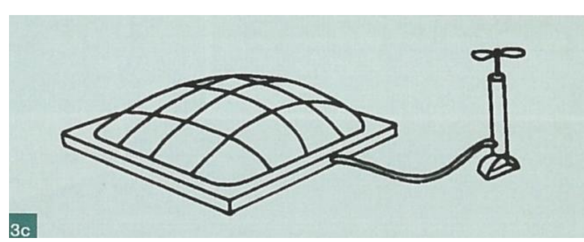
Experimentální ověřeních chování skořepiny zvoleného tvaru

Protože ani po nalezení „správného“ tvaru skořepiny, nebylo snadné chování skořepiny ověřit výpočtem, ověřovalo se i chování skořepiny při zatížení experimentálně – měřením na modelech postavených v určitém měřítku

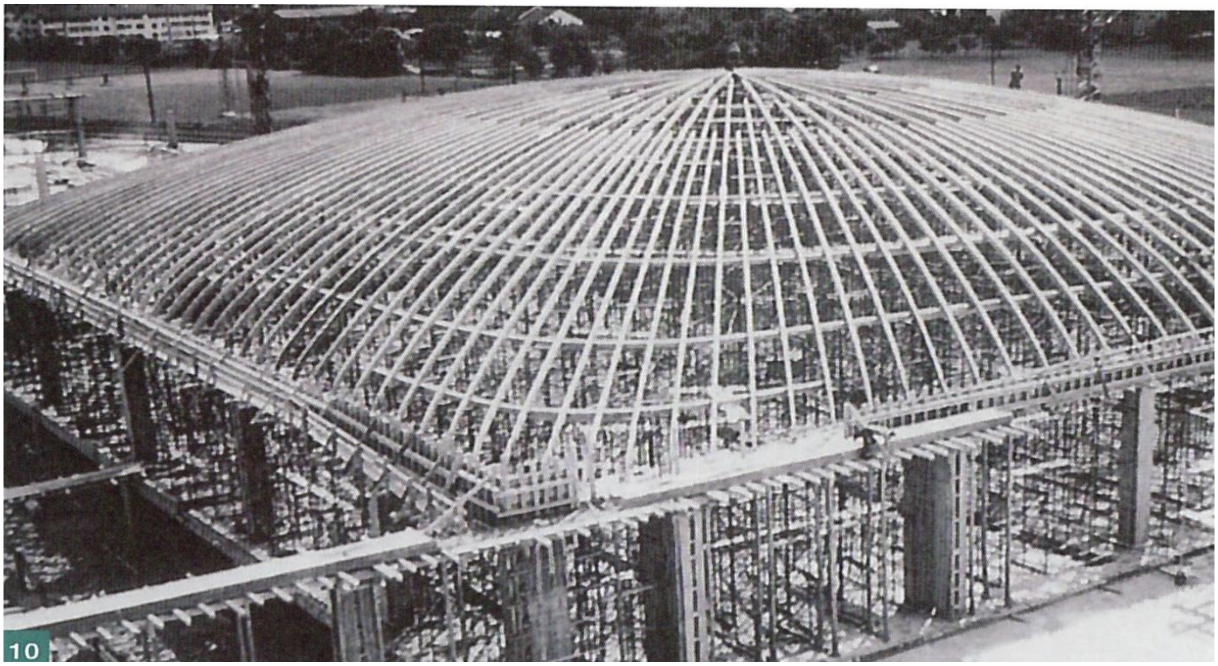
Odpovídající skutečná konstrukce – zahradní centrum Florétites Clause SA, Paříž diagonální rozpětí 41 m, tloušťka skořepiny 80 mm.

Jinou možností je nafouknout pružnou gumovou membránu vzduchem. Takový model odpovídá zatížení ve směru kolmém na střednicovou plochu membrány. Rozdíl mezi zatížením kolmým na plochu a zatížením svislým lze však při malých vzepětích rovněž zanedbat. Tento model však lze realizovat pouze při určitých typech podepření (spojité podepření po celém obvodě).

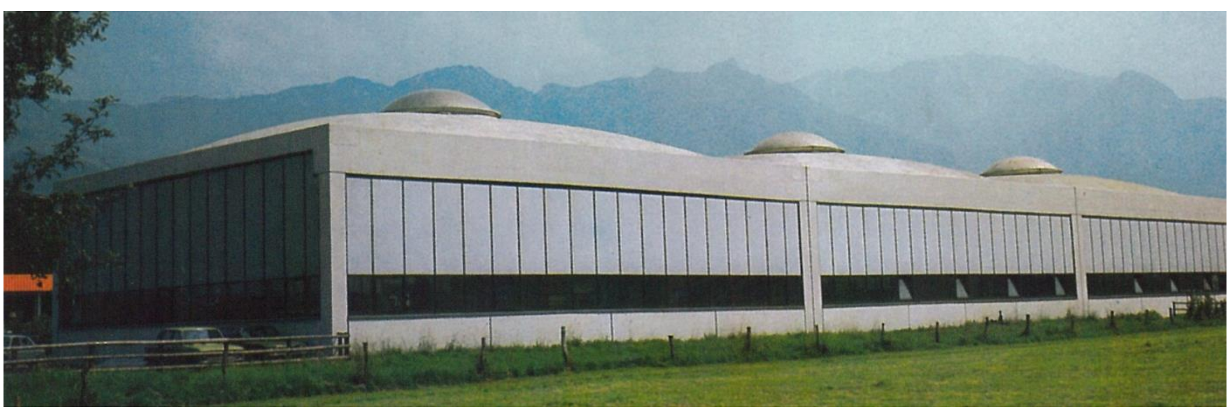




Experimenty s nafouknutou membránou



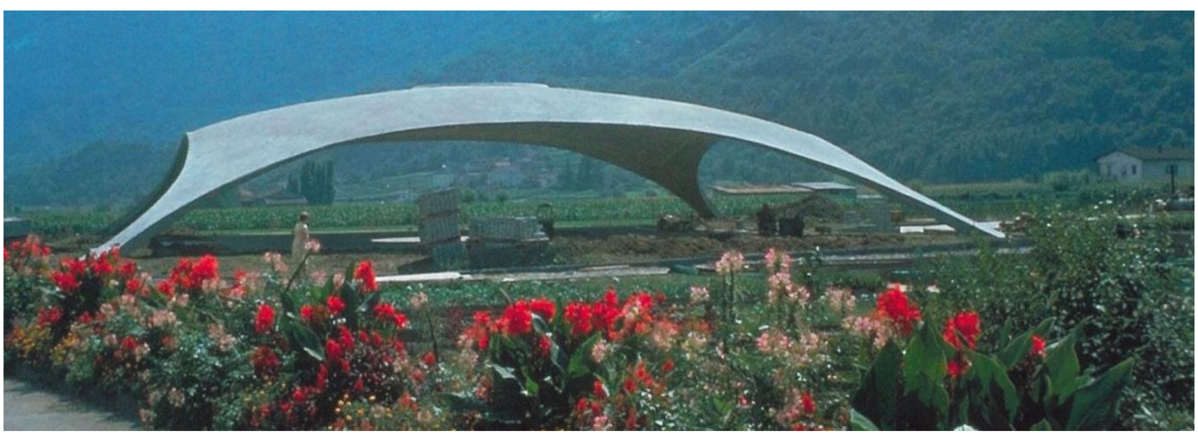
Bednění tvaru skutečné konstrukce, odvozeného z tvaru nafouknuté membrány



Skutečná konstrukce – pohled zvenku

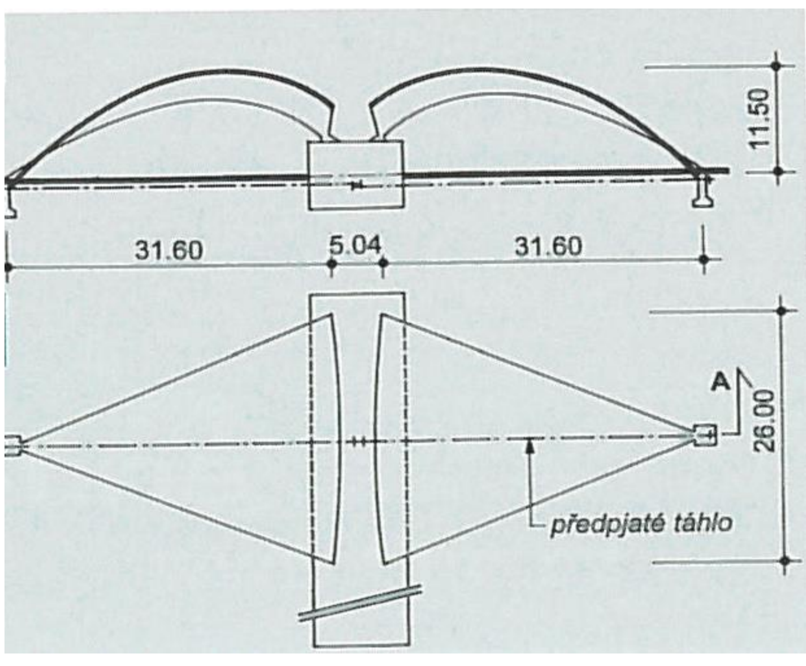
Výše uvedeným způsobem, na základě analogie s nafouknutým polštářem, vznikly konstrukce typu „buble shells“. Těchto konstrukcí se podle návrhů prof. Islera postavilo velké množství, především pro průmyslové využití. Měly rozpětí od 22 do 59 m. Pro rozpětí do 25 m se používala tloušťka 80 mm, pro větší rozpětí tloušťka 100 mm.
Měřením na modelech skořepin typu „buble shell“ se ukázalo, že 90 % zatížení se přenáší v rozích skořepiny a pouze 10% podél stran. To umožnilo konstrukci dále zjednodušit a podepřít skořepinu v rozích sloupy a po obvodě pouze nepříliš vysokými žebry.

Střecha haly Moser AG, Lysach –10 kopulí s rozpětím 22 x 22 m, tloušťka 80 mm



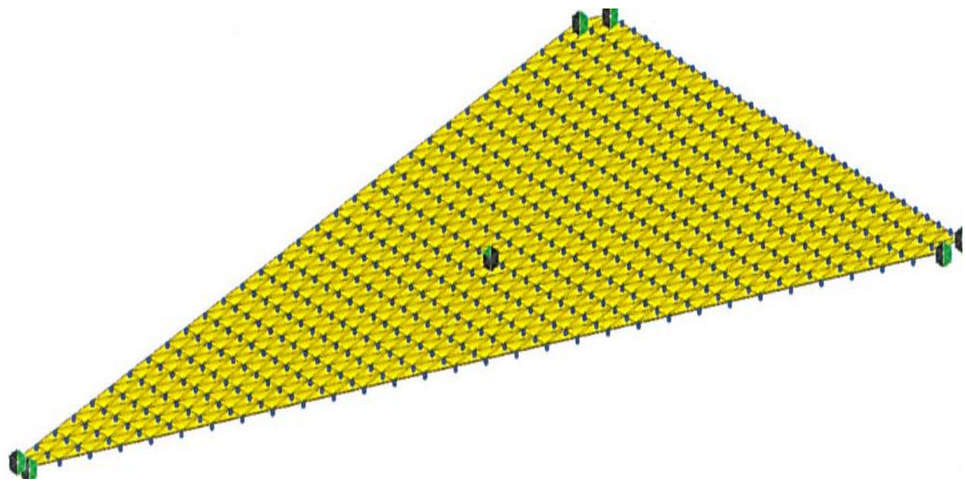
Zahradní centrum Bürgi Garden, Camorino – rozpětí 27,16 x 27,16 m
(beton TKS 2/2013)

Čerpací stanice Deitingen Süd na dálnici Bern – Zürich –
2 x trojúhelníkový půdorys 31,6 x 26 m, tloušťka 90 mm

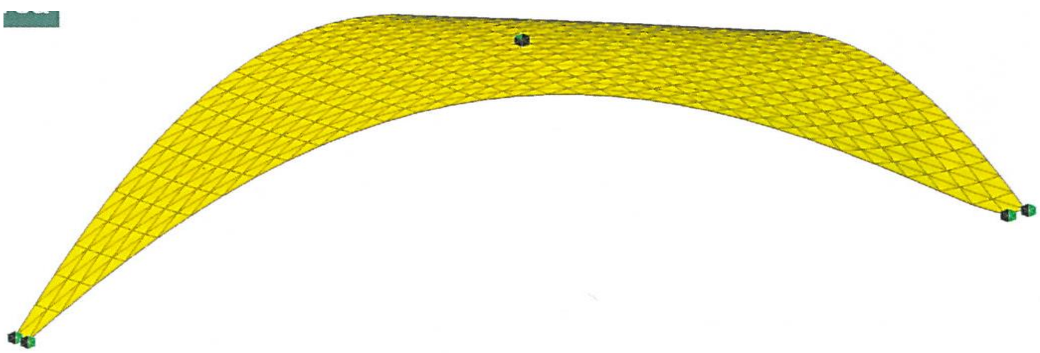


Půdorys a řez konstrukcí

V současné době jsme schopni hledat „správné“ tvary skořepin s použitím počítačů a počítačových programů pracujících na principu metody konečných prvků. S použitím těchto programů lze hledat tvary skořepin podobným způsobem, jako při výše popsaných experimentech. Tady jako průhybové plochy tenkých desek – membrán. Je však třeba používat nelineární programy, které počítají podmínky rovnováhy na deformovaném modelu, protože vypočtený průhyb je typicky tak velký, že ho nelze zanedbat vzhledem k rozměrům konstrukce.



Tenká trojúhelníková deska, rozdělená na konečné prvky – model pro výpočet tvaru skořepiny nad čerpací stanicí dnešními prostředky.



Výpočtový model pro ověření konstrukce, získaný nelineárním výpočtem jako průhybová plocha membrány (Beton TKS 5/2014).

Závěr

Pantheon má rozpětí kopule 43,3 m a tloušťku klenby ve vrcholu 1,60 m a v patě 6 m. Není to skořepina. Je to klenba. Vznikl v roce 110 našeho letopočtu.

Divadlo v Novosibirsku má rozpětí kopule 55,5 m a tloušťku skořepiny 80 mm. Je to skořepina. Vzniklo v roce 1944.